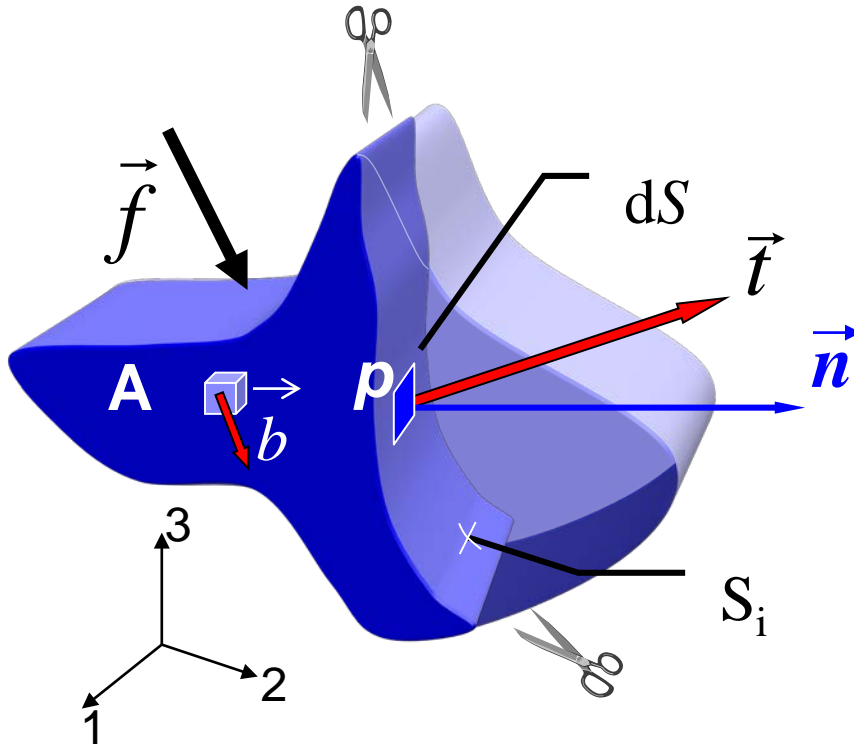


# TEMA 3. TENSIONS

## 3.1. El Vector Tensió



$\vec{n}$  versor normal definit des de l'interior de la part de medi considerada (A), cap a l'exterior

## VECTOR TENSIÓ $\vec{t}$

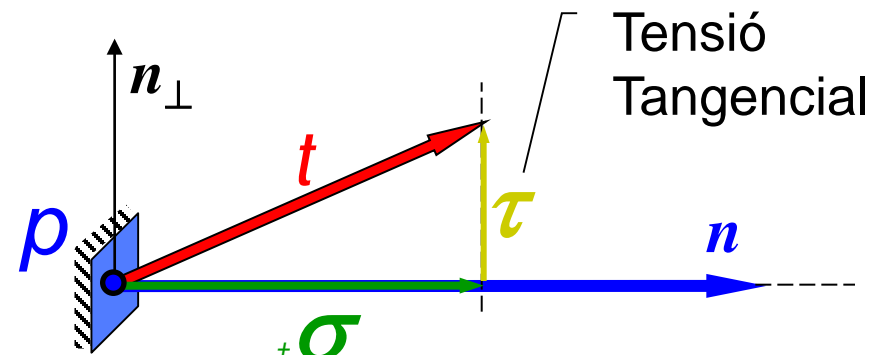
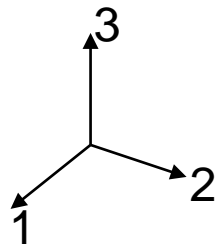
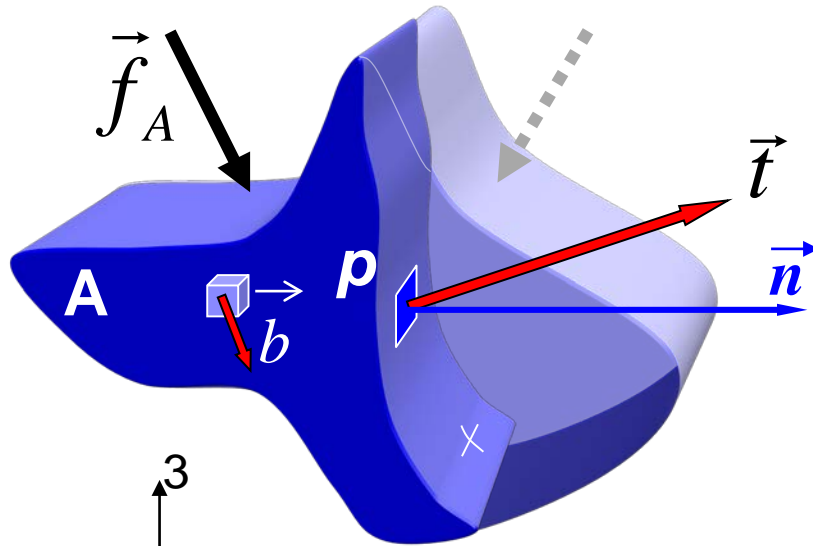
$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{N/mm}^2)$$

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{B \rightarrow A}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}_{B \rightarrow A}}{dS}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = \frac{d\vec{M}}{dS} = 0$$



Acció de B contra A:

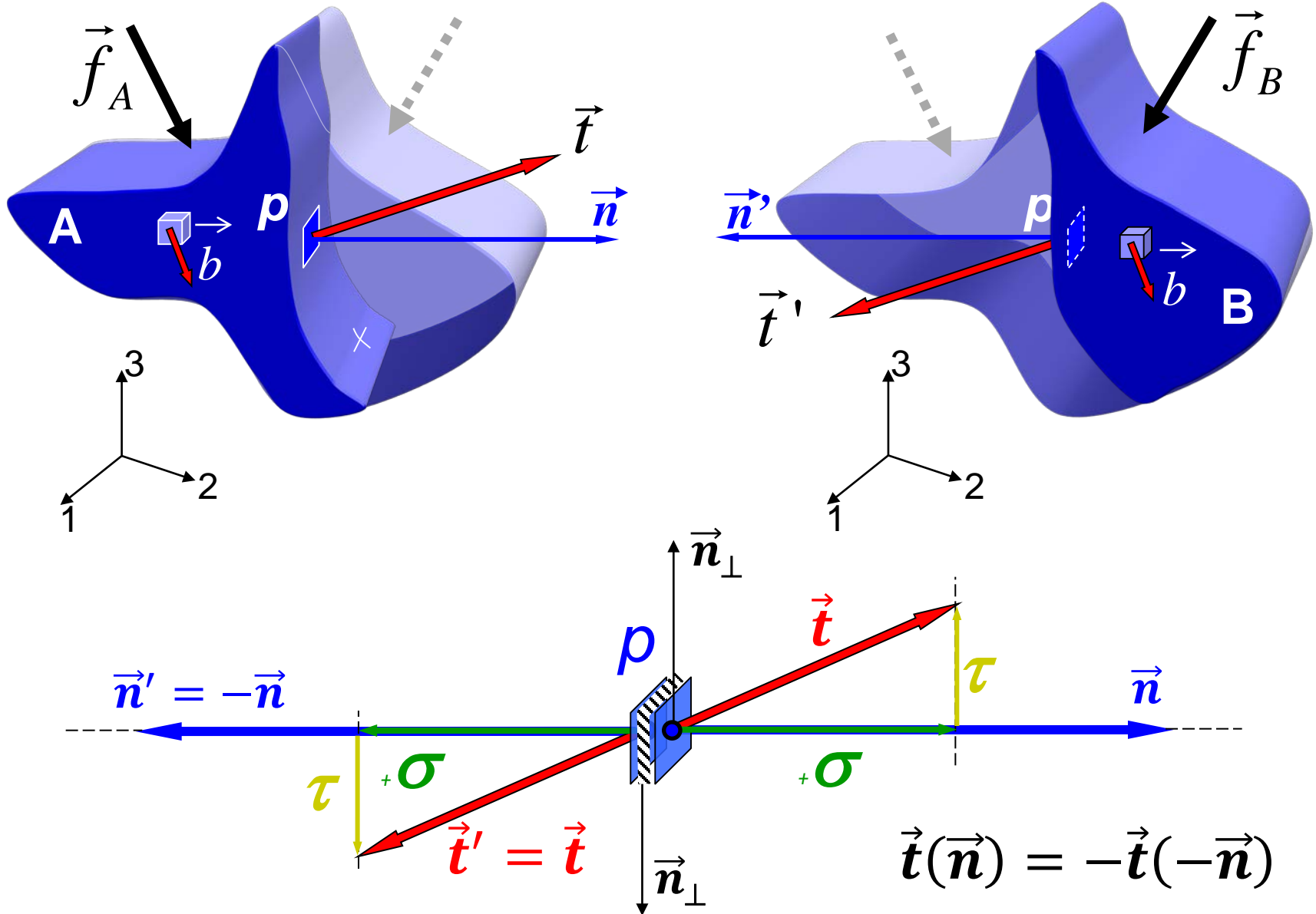


Tensió Normal

Tensió Tangencial

COMPONENTS  
INTRÍNSEQUES DEL  
VECTOR TENSIÓ

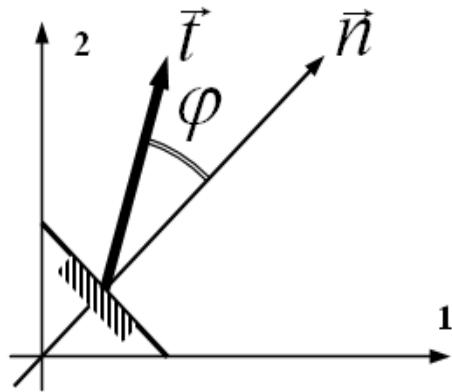
Principi d'acció i reacció:



## # Activitat 3.1

### Test 30-10-2001 Qüestió 10:

10) Dado el vector tensión  $\vec{t}$  que actúa sobre el plano de normal  $\vec{n}$ , el módulo de la tensión tangencial correspondiente vale:



$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} 70 \\ 25 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

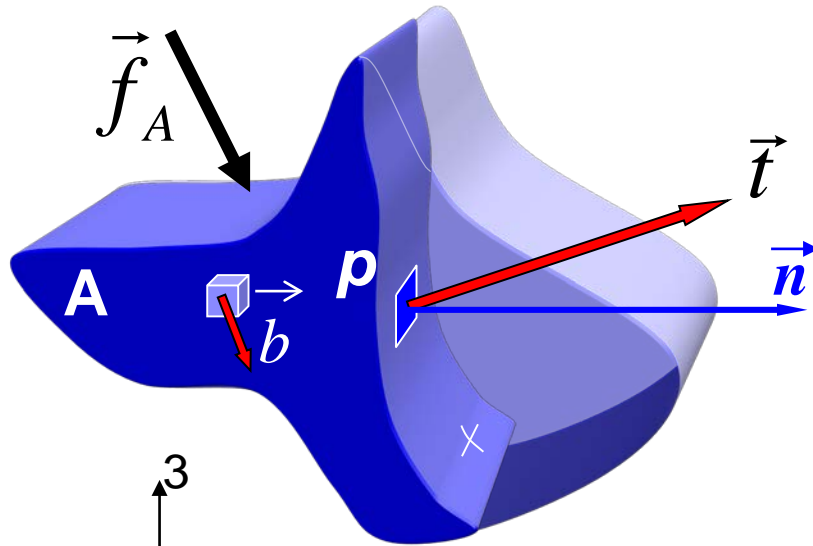
A) 31.8

B) 67.2

C) 25

D) Ninguna de las anteriores

Acció de B contra A:



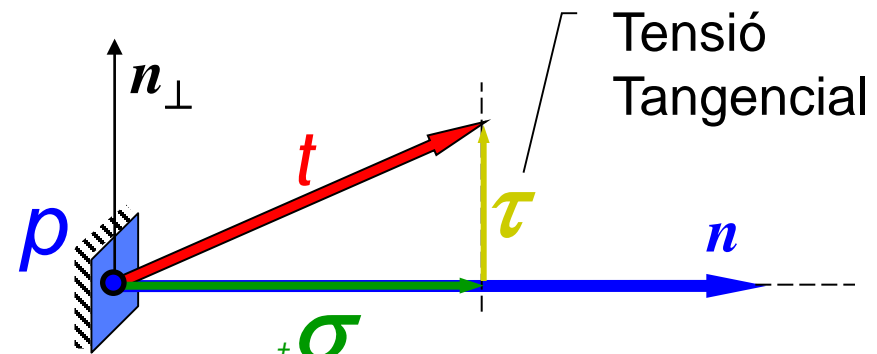
$$\sigma = \vec{t} \cdot \vec{n}$$

$$\tau = \vec{t} \cdot \vec{n}_{\perp}$$

$$\tau = \pm \sqrt{t^2 - \sigma^2}$$

$$\vec{\sigma} = (\vec{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = \vec{n} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{n})$$



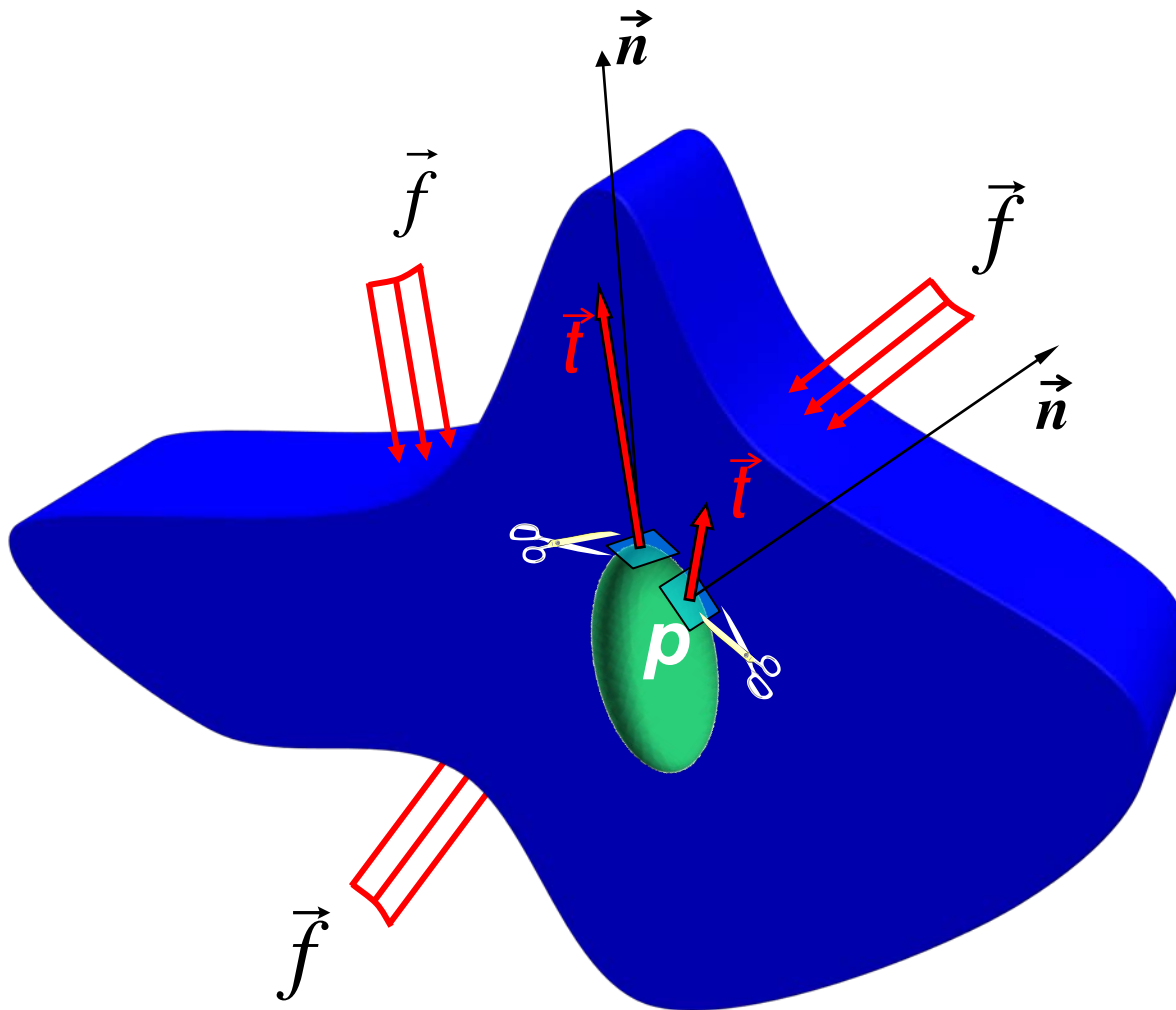
Tensió Normal

Tensió Tangencial

COMPONENTS  
INTRÍNSEQUES DEL  
VECTOR TENSIÓ

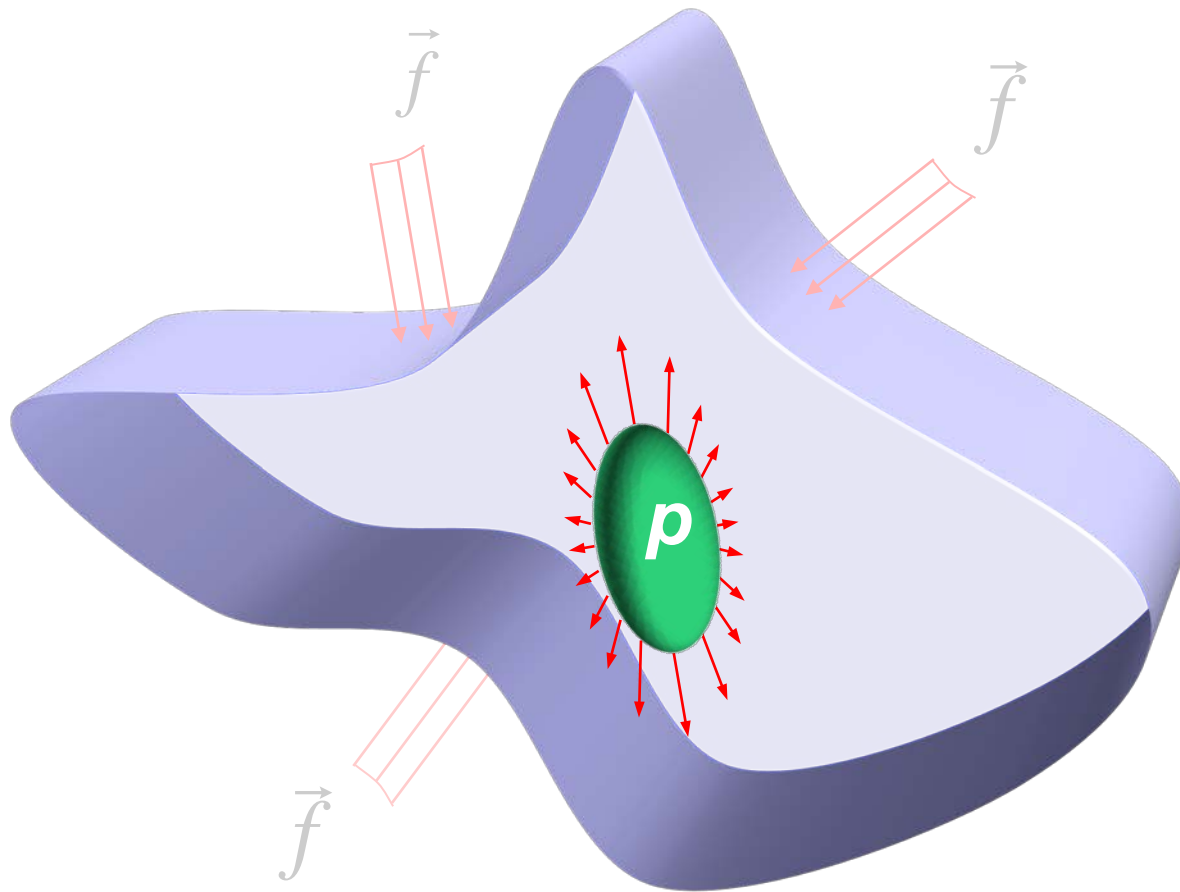


# L'ESTAT DE TENSIÓ



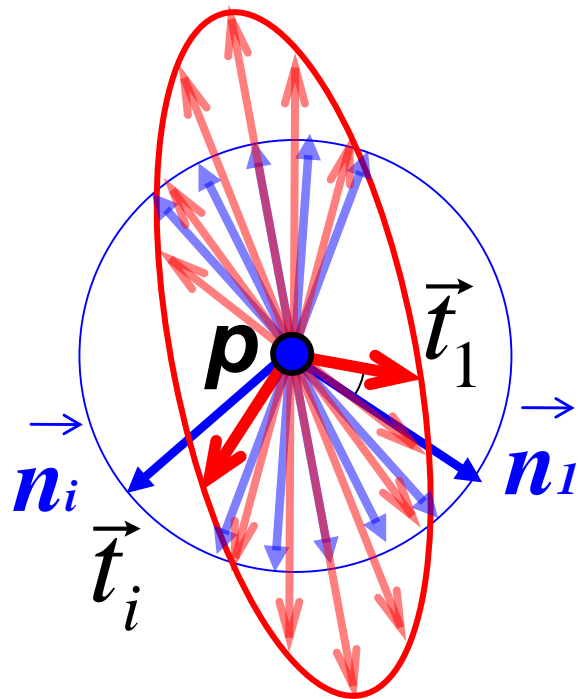


## L'ESTAT DE TENSIÓ



## EL·LIPSOIDE DE VECTORS TENSIÓ

En un punt  $p$ , existeix un vector tensió associat a cada direcció de l'espai:



Els extrems dels vectors tensió defineixen l'anomenat “el·lipsoide de tensions” (El·lipsoide de Lamé)

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

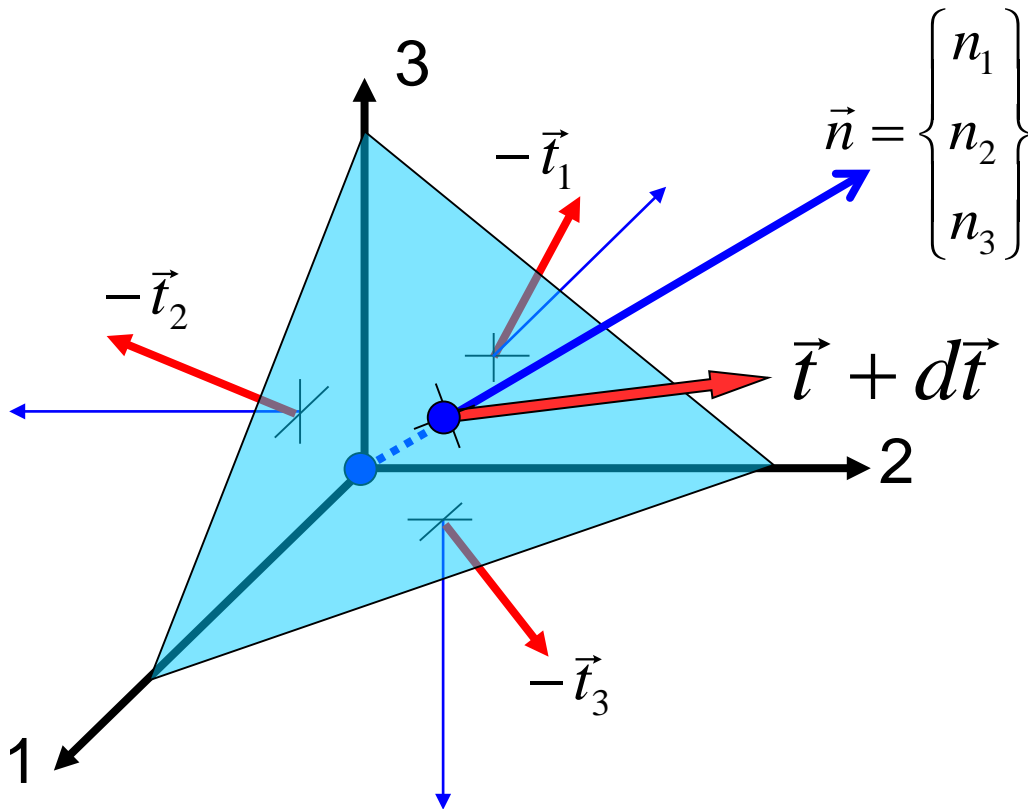
$$\vec{n} \rightarrow \vec{t}$$

Coneguts 3 d'aquests vectors, l'aplicació queda completament definida:



$$\Sigma \vec{F} = \rho \cdot a_G \cdot dV \quad 2^{\text{a}} \text{ Llei de Newton}$$

$$-\vec{t}_1 n_1 dS - \vec{t}_2 n_2 dS - \vec{t}_3 n_3 dS + (\vec{t} + d\vec{t}) dS + \vec{b} dV = \vec{a}_G \rho dV$$



$$\vec{t} = \vec{t}_1 n_1 + \vec{t}_2 n_2 + \vec{t}_3 n_3$$

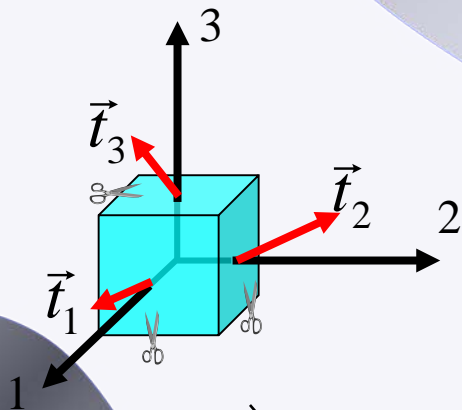
$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} n_1 + \begin{Bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} n_2 + \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} n_3$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{t} = [\sigma]^T \vec{n}}$$

## 3.2. El Tensor Tensió $[\sigma]$

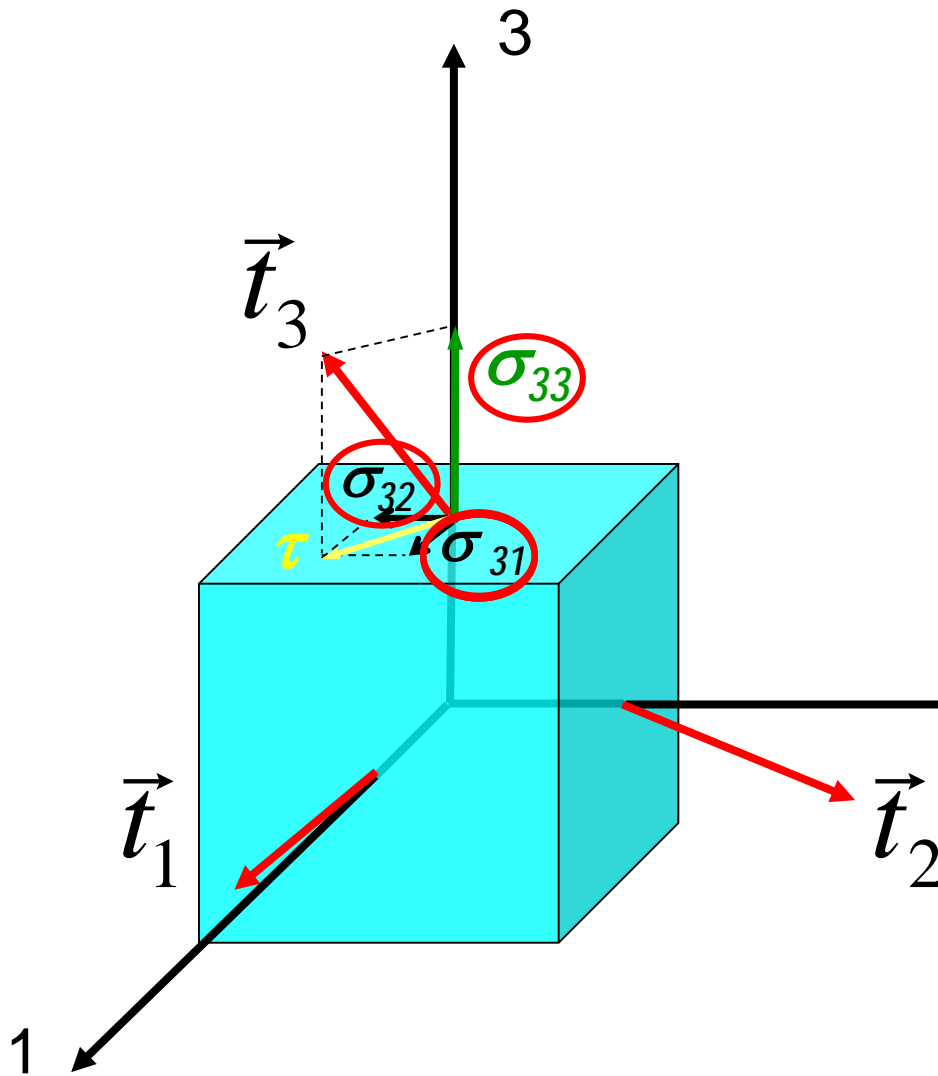
El Tensor Tensió és la matriu representativa d'aquesta aplicació, expressada en una base determinada



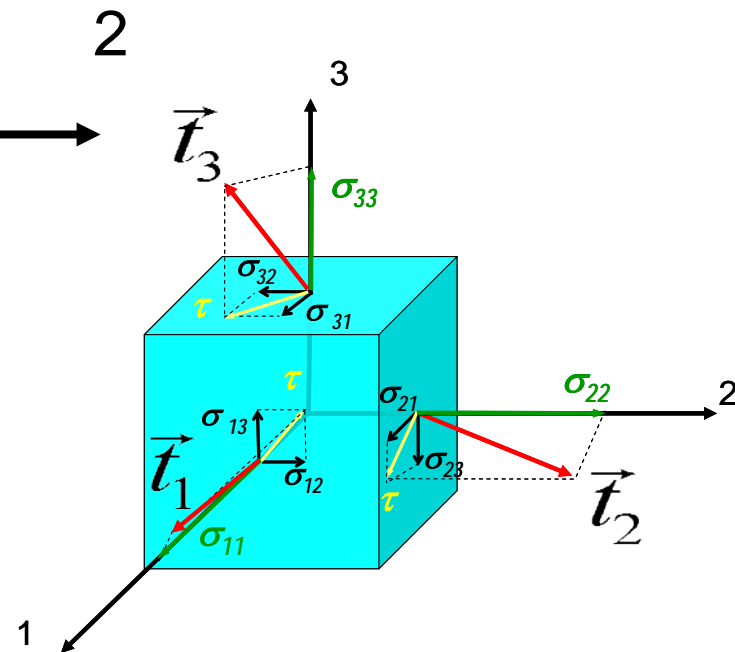
Vectors tensió dels plans de referència expressats en la base  $(1,2,3)$

$$[\sigma]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{t}_3$

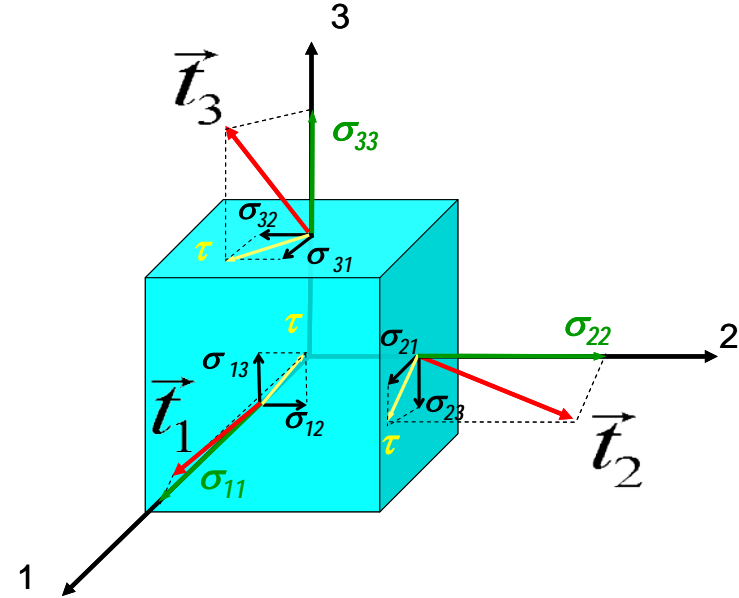
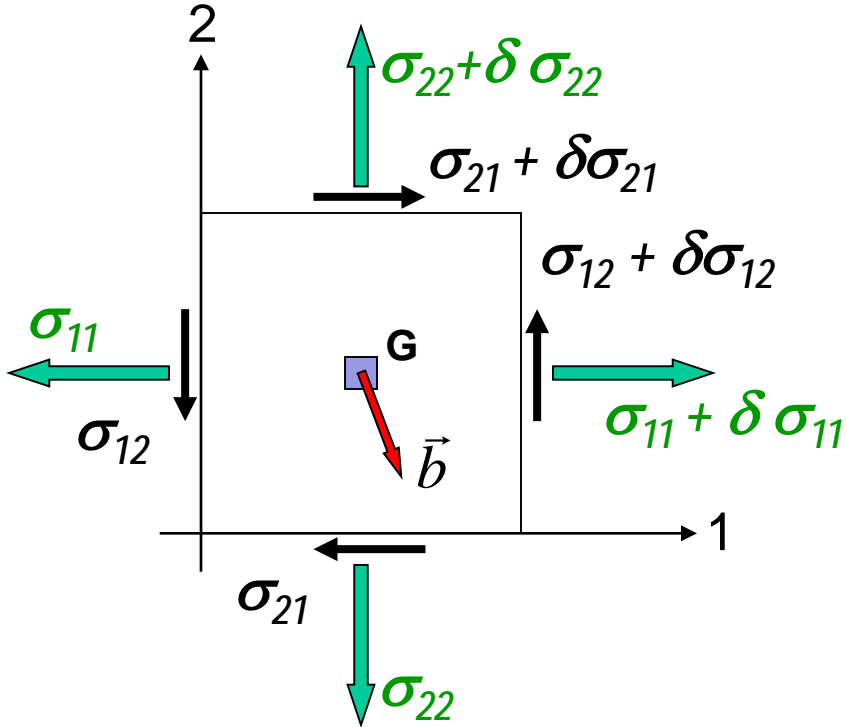


$$[\sigma]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



## RECIPROCATAT DE LES TENSIONS TANGENCIALS

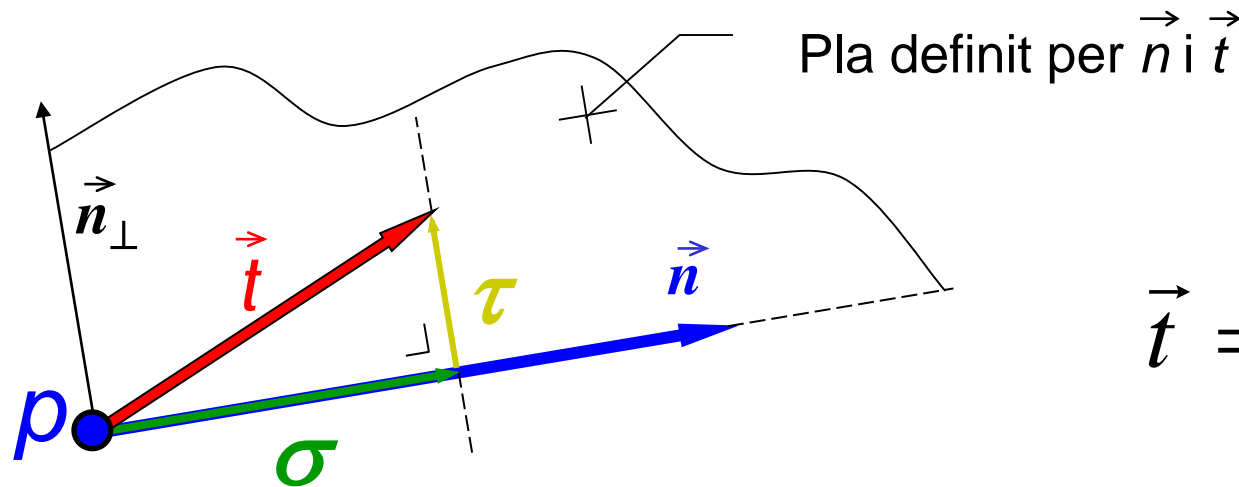
Plantejant l'equilibri de moments respecte les 3 arestes del volum diferencial ... (p.77)



$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

A partir del tensor tensió, podem determinar el valor de les *components Intrínseques* del vector tensió:



$$\vec{t} = [\sigma] \vec{n}$$

$$\sigma = \vec{t} \cdot \vec{n} = \vec{n}^T [\sigma] \vec{n}$$

Tensió normal

$$\tau = \vec{t} \cdot \vec{n}_\perp = \vec{n}_\perp^T [\sigma] \vec{n}$$

Tensió tangencial

$$\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2}$$

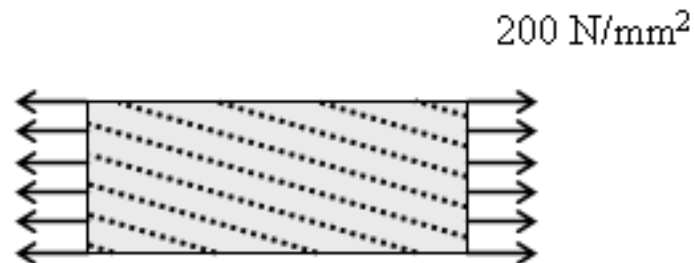
$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = \vec{n} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{n})$$

## # Activitat 3.2

### Test 07-04-2006 Qüestió 4:

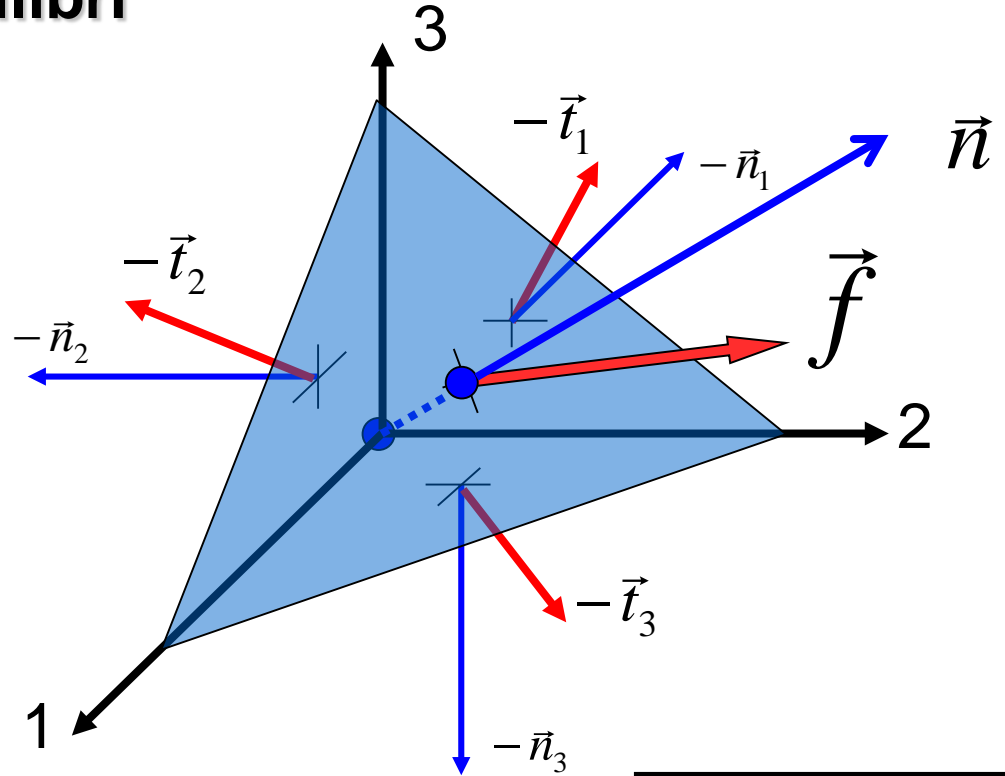
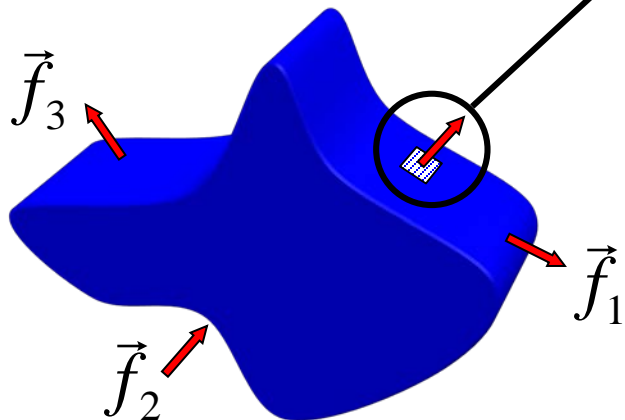
4.- La proveta plana il·lustrada a la figura està sotmesa a un estat de tracció uniaxial de  $200 \text{ N/mm}^2$  i està constituïda per un “material compost”: fibres orientades a  $10^\circ$  de la direcció de tracció, en una matriu de resina. Determinar la tensió normal que actua entre la fibra i la matriu i que tendeix a separar-les ( $\text{N/mm}^2$ ).

- A) 6
- B) 34
- C) 193
- D) -34



### 3.3. Condicions d'equilibri

per a un punt de la superfície:  
"CONDICIÓ DE CONTORN"



$$\Sigma d\vec{F} = \vec{a}_G \rho dV$$

.....

Condicions de Contorn:

$$\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$$

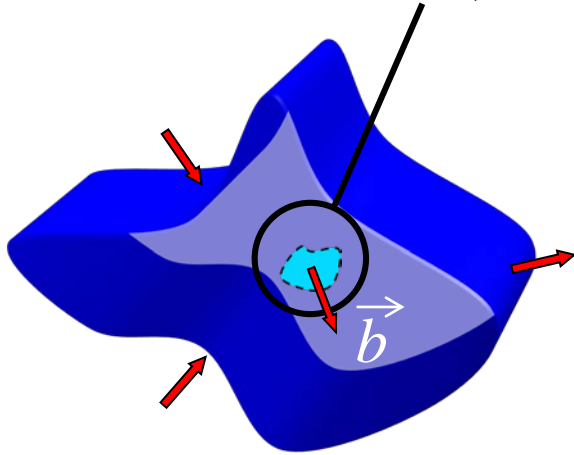
$$f_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$$

$$f_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

$$f_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3$$

Per a un punt interior,

$$\Sigma \vec{F} = \vec{a}_G \int_V \rho dV \quad \int_S ([\sigma] \vec{n}) dS + \int_V \vec{b} dV = \int_V \vec{a} \rho dV$$



aplicant el Teorema de Gauss:  $\int_V \text{div}[\sigma] dV = \int_S [\sigma] \cdot \vec{n} dS$

$$\int_V \text{div}[\sigma] dV + \int_V \vec{b} dV = \int_V \vec{a} \rho dV$$

$$\text{div}[\sigma] + \vec{b} = \rho \vec{a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = \rho a_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = \rho a_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = \rho a_3$$

Equilibri: 
$$\text{div}[\sigma] + \vec{b} = \vec{0}$$

o "equilibri dinàmic" si  $\vec{b}$  inclou  $-\rho \vec{a}$  (d'Alembert)

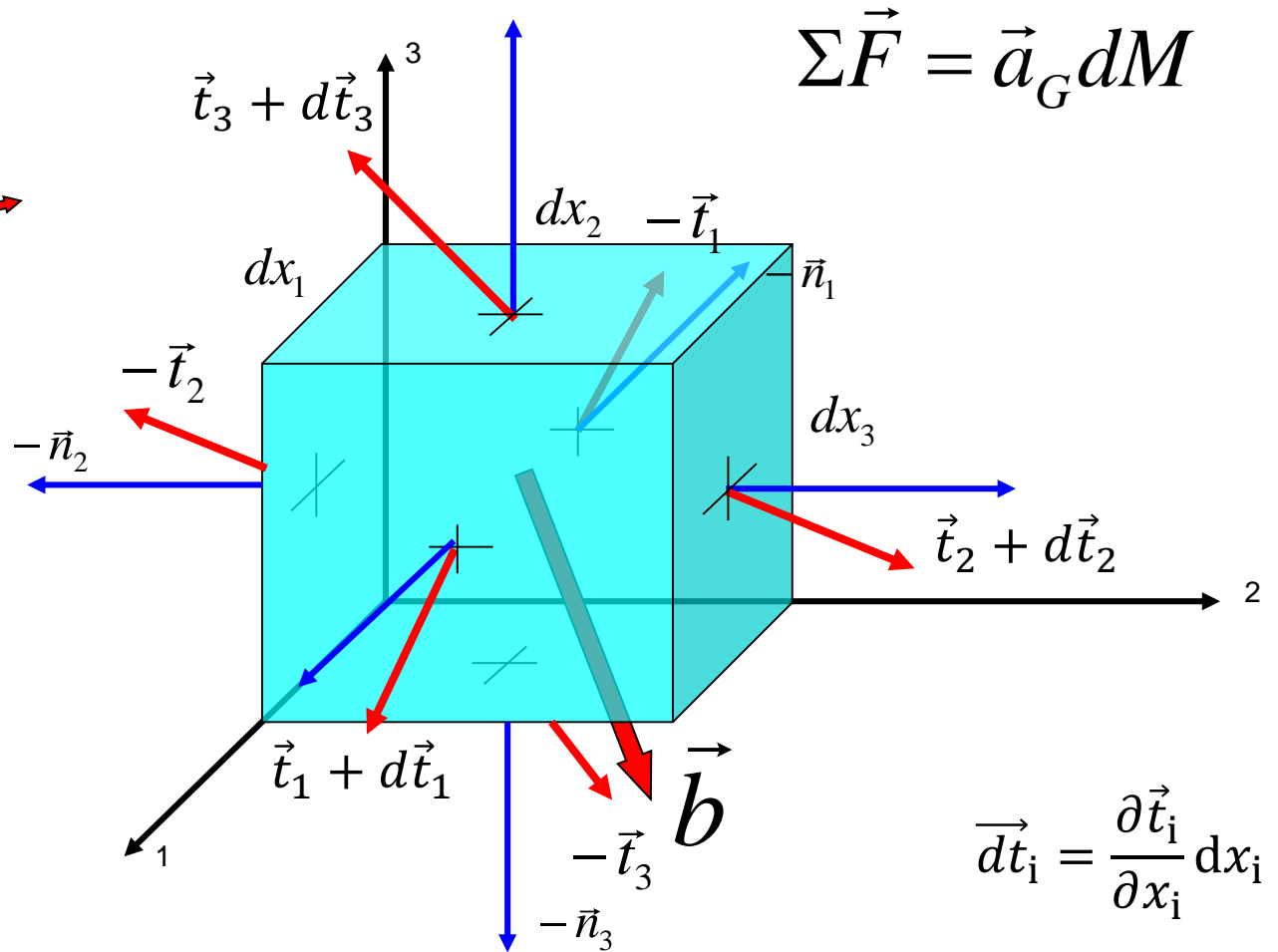
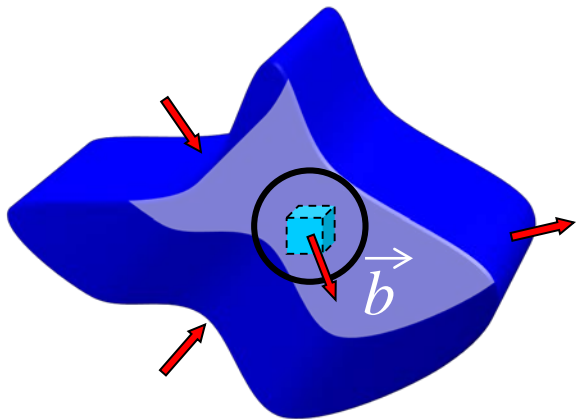
Jean Le Rond d'Alembert  
 1717 - 1783  
 Matemàtic francès





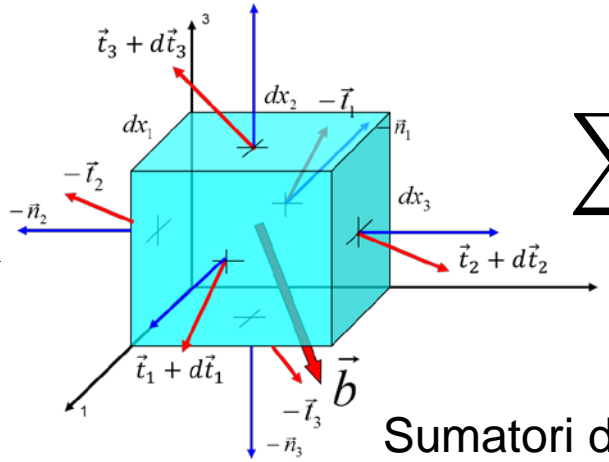
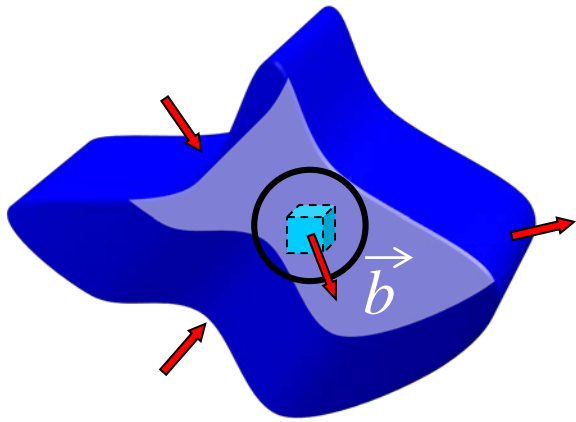
Per a un punt interior,

S'arriba al mateix resultat aplicant la 2<sup>a</sup> llei de Newton al paral·lelepípede infinitesimal:



$$\Sigma \vec{F} = \vec{a}_G dM$$

$$d\vec{t}_i = \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial x_i} dx_i$$



$$\sum \vec{F} = \vec{a}_g dM = \vec{a}_\rho dx_1 dx_2 dx_3$$

Sumatori de forces sobre les cares :

$$-\vec{t}_1 dx_2 dx_3 - \vec{t}_2 dx_1 dx_3 - \vec{t}_3 dx_1 dx_2 + (\vec{t}_1 + d\vec{t}_1) dx_2 dx_3 + (\vec{t}_2 + d\vec{t}_2) dx_1 dx_3 + (\vec{t}_3 + d\vec{t}_3) dx_1 dx_2 =$$

$$d\vec{t}_1 dx_2 dx_3 + d\vec{t}_2 dx_1 dx_3 + d\vec{t}_3 dx_1 dx_2 = \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 + \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2$$

Sumatori de forces total :

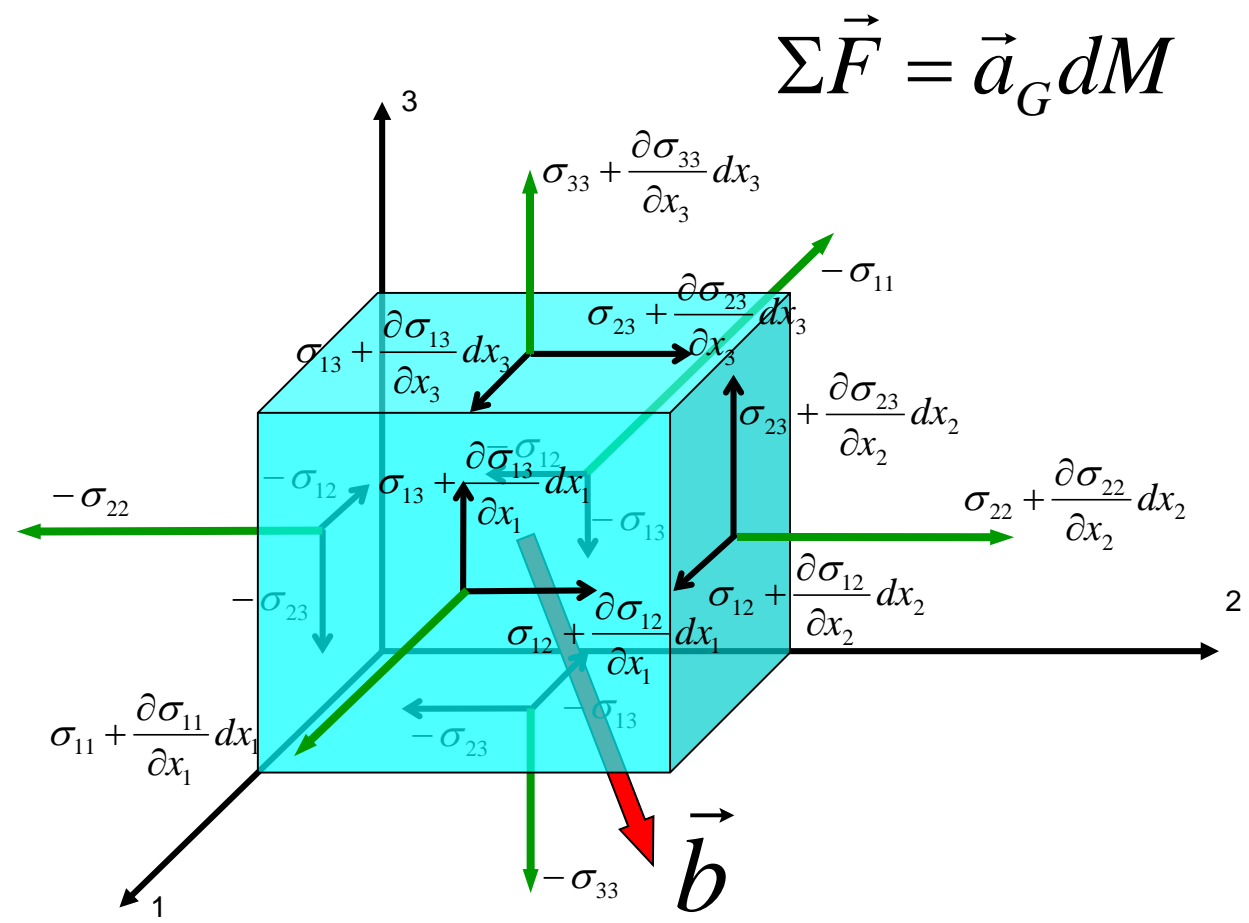
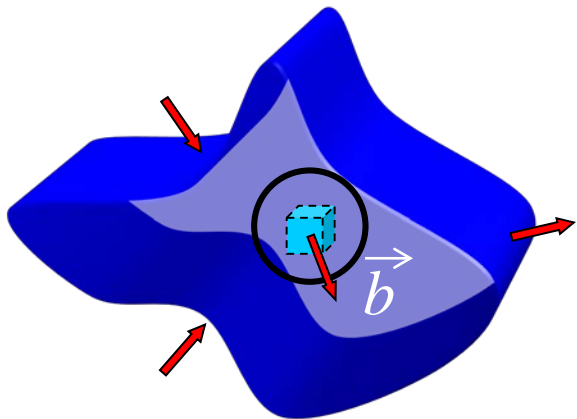
$$\sum \vec{F} = \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 + \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 + \vec{b} dx_1 dx_2 dx_3 = \vec{a}_\rho dx_1 dx_2 dx_3$$

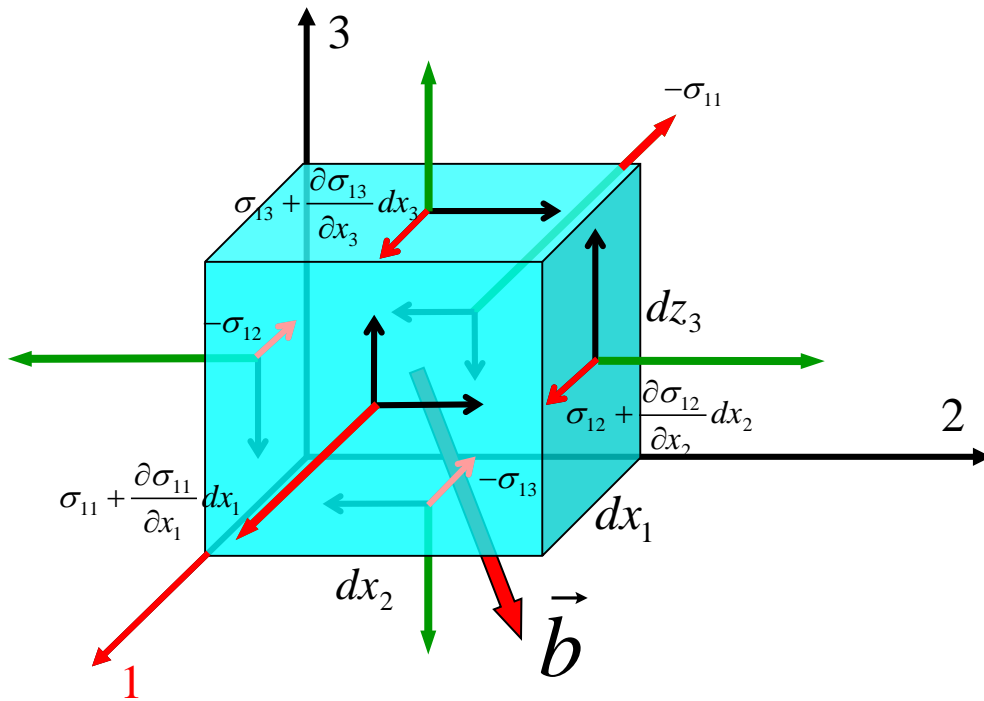
$$\frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3} + \vec{b} = \vec{a}_\rho$$

$$\text{div}[\sigma] = \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3}$$

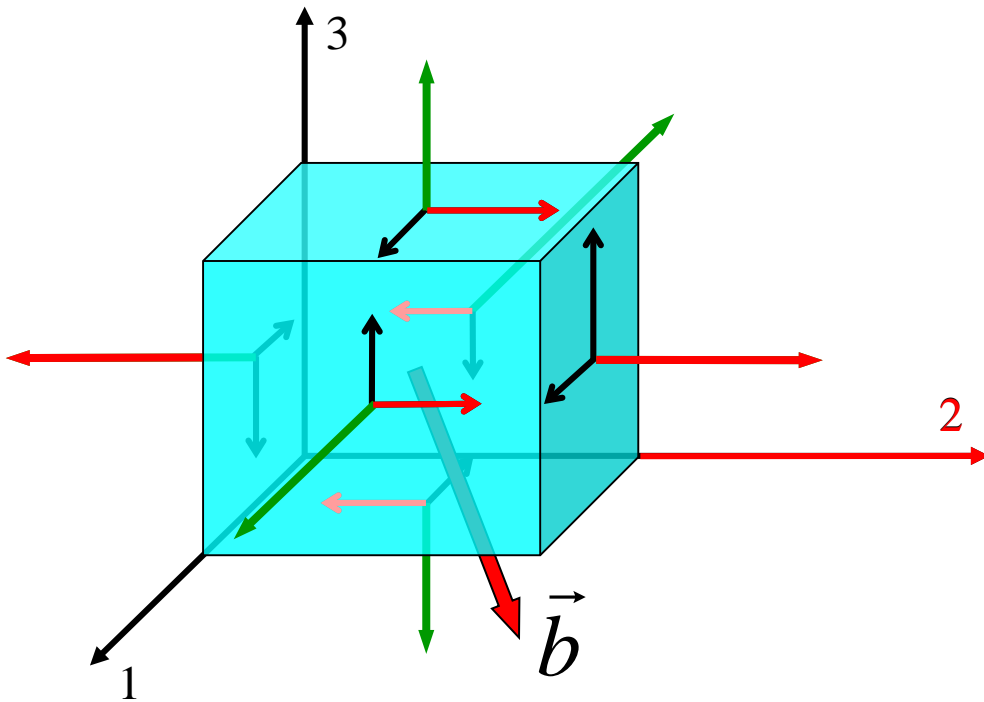
Per a un punt interior,

S'arriba al mateix resultat aplicant la 2<sup>a</sup> llei de Newton al paral·lelepípede infinitesimal:

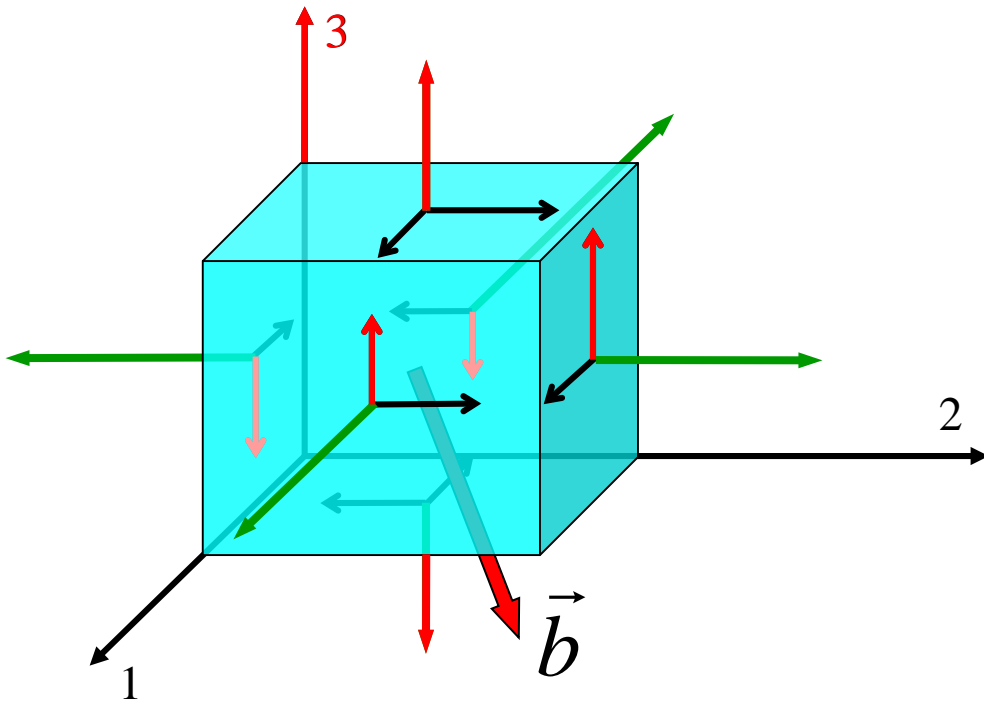




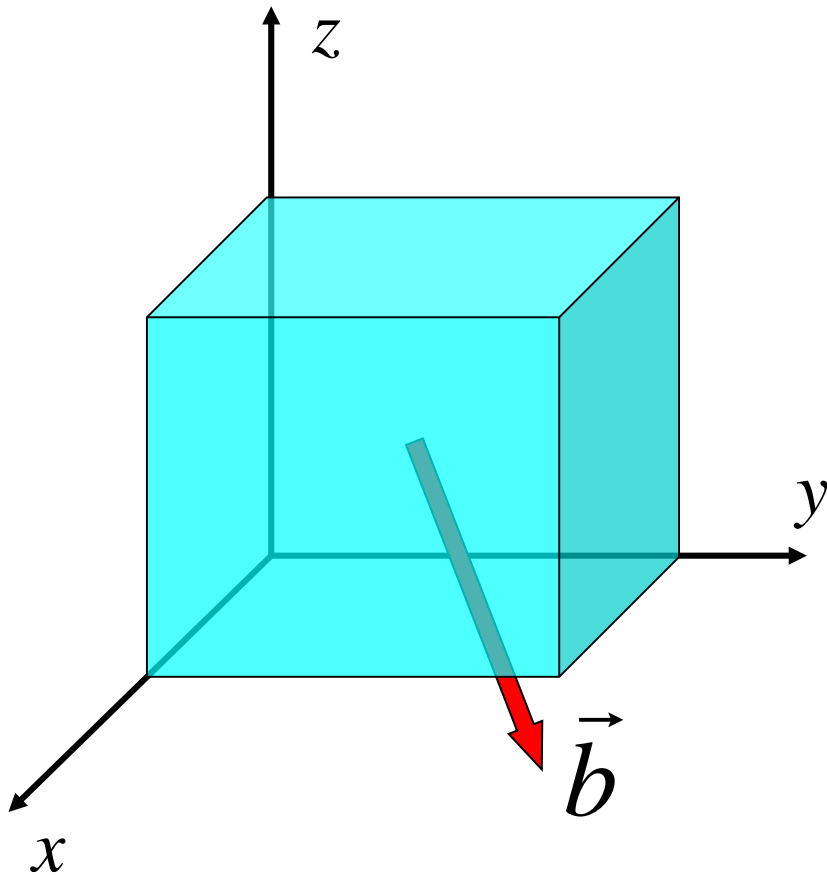
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = \rho a_1$$



$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = \rho a_2$$



$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = \rho a_3$$



Notació més habitual a l'Enginyeria:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho a_x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = \rho a_y$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \rho a_z$$



## # Activitat 3.3

### Test 27-10-2005 Qüestió 5:

Un camp de tensions, descrit mitjançant el tensor tensió  $[\sigma]$ , independent de  $x_3$ , actua sobre un medi continu en equilibri. Sabent que no hi actuen forces de volum ( $\vec{b} = 0$ ) i que el vector tensió que actua sobre el pla  $x_1 = 0$  és  $\vec{t}$ , es demana:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & x_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{t}_{(x_1=0)} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ 1 - x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5.- Determinar la funció  $\sigma_{12}$

- A)  $x_1 - x_2 + 1$    B)  $1 - x_2 + x_1 \cdot x_2/2$    C)  $1 - x_2 + x_1^2$    D)  $1 - x_2 + x_1^2 \cdot x_2/2$



## 3.5. Direccions i Tensions Principals

Existeix alguna direcció  $\vec{n}$  en la què el vector  $\vec{t}$  només té component normal  $\sigma$  ?

$$\vec{t} = [\sigma] \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n}$$

$$[[\sigma] - \sigma[I]] \vec{n} = \vec{0}$$

↓  $\vec{n} \neq \vec{0}$

$$\det[[\sigma] - \sigma[I]] = 0$$

↓

**Polinomi i equació característics:**  
**3<sup>er</sup> grau, 3 solucions**

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

**INVARIANTS**  $I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$

$$I_3 = \det[\sigma]$$

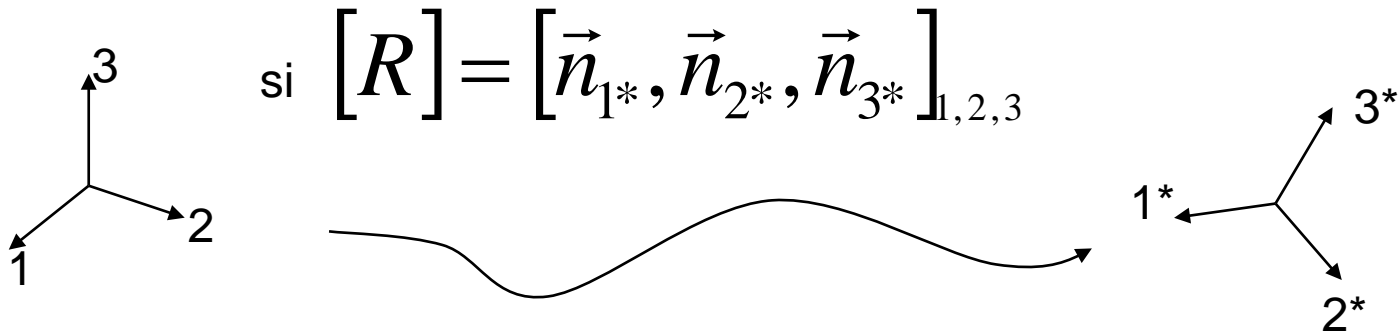
### 3.5. Direccions i Tensions Principals

Sempre existeixen 3 direccions  $\vec{n}_1^*$ ,  $\vec{n}_2^*$  i  $\vec{n}_3^*$  amb el corresponent vector tensió  $\vec{t}$  alineat amb les pròpies direccions. Vectors propis de  $[\sigma]$

$$[[\sigma] - \lambda_i [I]] \vec{n}_i = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{VEPs} \quad \vec{n}_i^* \quad \text{Direccions principals} \\ \text{VAPs} \quad \lambda_i^* = \sigma_i^* \quad \text{Tensions principals} \end{array} \right.$$

**CANVI DE BASE:** 
$$[\sigma]_{1^*,2^*,3^*}' = [R]^T [\sigma]_{1,2,3}$$

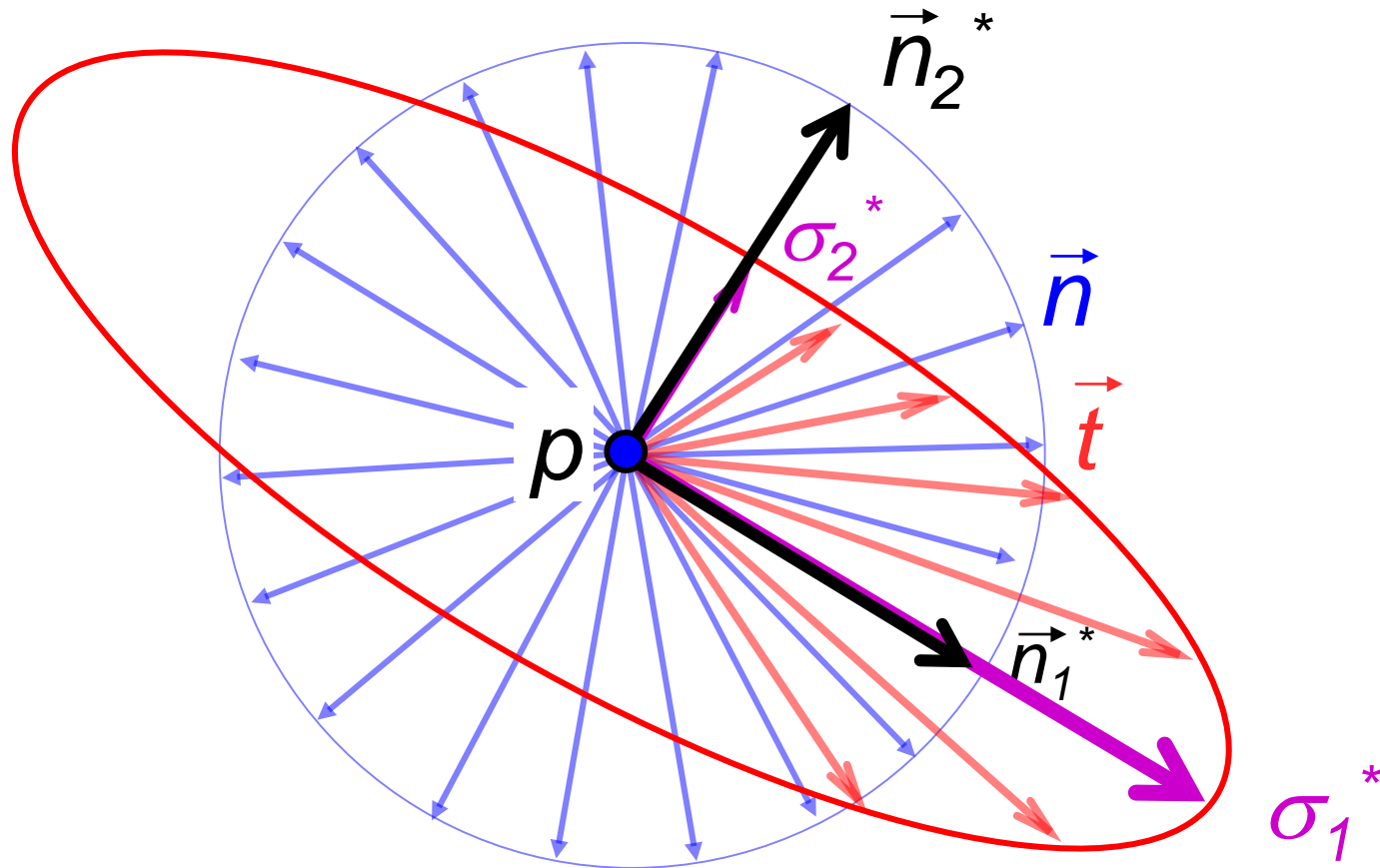
Els vectors propis són ortogonals i amb ells es pot formar una base (triedre directe).



$$[\sigma]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{1,2,3}$$

$$[\sigma]_{1^*,2^*,3^*}' = \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3^*} \end{bmatrix}_{1^*,2^*,3^*}$$

Representant la doble infinitat de direccions de l'espai  
i els respectius vectors tensió:



Sempre existeixen 3 vectors tensió perpendiculars als plans on actuen  
(tensió tangencial nul·la)

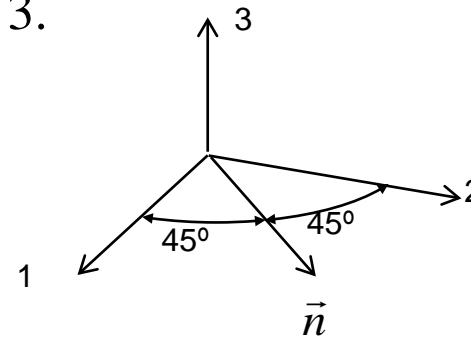
## # Activitat 3.4

[Mentimeter](#)

## Test 15-04-2005 Qüestió 8:

8.- Les direccions 1 i 2 de la figura són principals. Sobre l'element infinitesimal de superfície orientat amb el versor  $\vec{n}$  no hi actua cap tensió tangencial i la seva tensió normal és diferent de la que actua a l'element infinitesimal de superfície orientat pel versor 3.

¿Quina de les següents afirmacions és certa?



- A) L'afirmació de l'enunciat és impossible.
- B) La direcció 3 no pot ser principal perquè no ho és la definida per  $\vec{n}$ .
- C) Totes les direccions del pla 1,2 són principals.
- D) Per aquest estat de tensió, totes les direccions són principals.



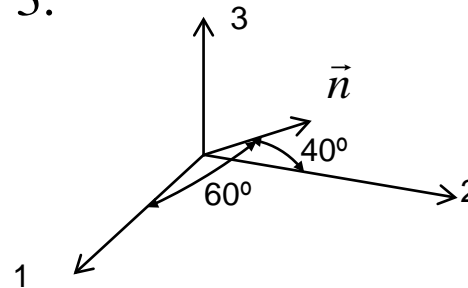
## # Activitat 3.4'

[Mentimeter](#)

### Test 15-04-2005 Qüestió 8 modificada:

8.- Les direccions 1 i 2 de la figura són principals. Sobre l'element infinitesimal de superfície orientat amb el versor  $\vec{n}$  no hi actua cap tensió tangencial i la seva tensió normal és diferent de la que actua a l'element infinitesimal de superfície orientat pel versor 3.

¿Quina de les següents afirmacions és certa?



- A) L'afirmació de l'enunciat és impossible.
- B) La direcció 3 no pot ser principal perquè no ho és la definida per  $\vec{n}$ .
- C) Totes les direccions del pla 1,2 són principals.
- D) Per aquest estat de tensió, totes les direccions són principals.



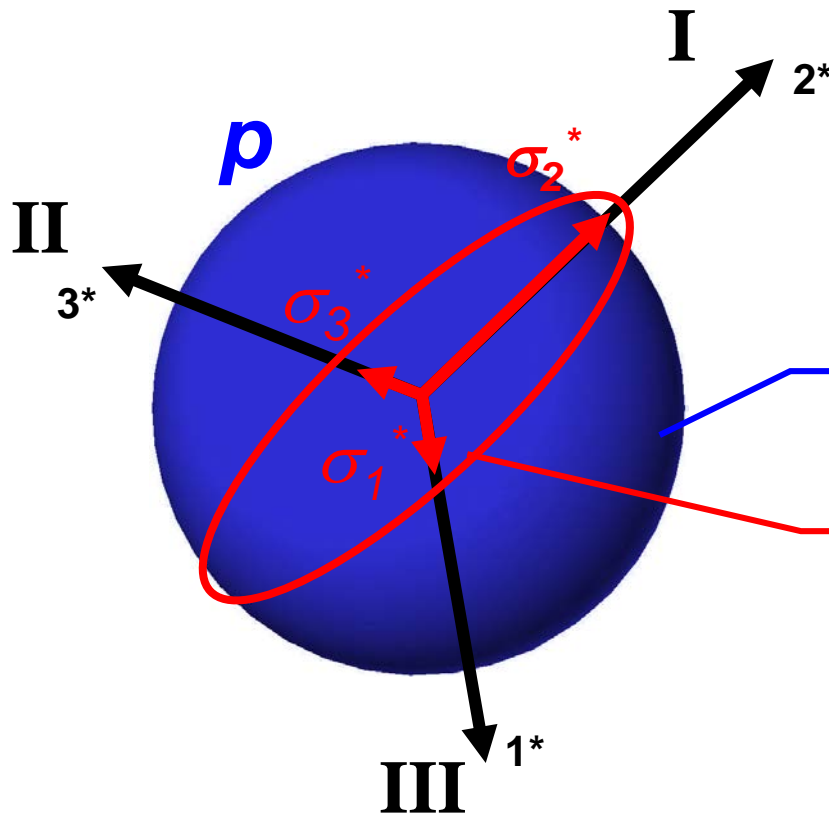
## # Activitat 3.5

L'estat tensional en un punt ve donat per les següents components del tensor tensió  $[\sigma]$  en MPa:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{11} = -4 & \sigma_{12} = 4 \\ \sigma_{22} = 2 & \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{33} = 1 & \sigma_{23} = 0 \end{array}$$

Determinar:

- 1) Les tensions principals  $\sigma_{1^*}$ ,  $\sigma_{2^*}$  i  $\sigma_{3^*}$
- 2) Les direccions principals  $\vec{n}_{1^*}$ ,  $\vec{n}_{2^*}$  i  $\vec{n}_{3^*}$



Entorn esfèric diferencial  $P$   
D'UNA PARTÍCULA

El·lipsoide de Lamé



Gabriel Lamé  
1795-1870  
Matemàtic Francès

### Nomenclatura I, II, III:

direccions ordenades de major (I) a menor (III)

(traccions positives)

(compressions negatives)

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$



COMPONENT ESFÈRICA I COMPONENT DESVIADORA DE  $[\sigma] = [\sigma_0] + [s]$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_0) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma_0) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma_0) \end{bmatrix}$$

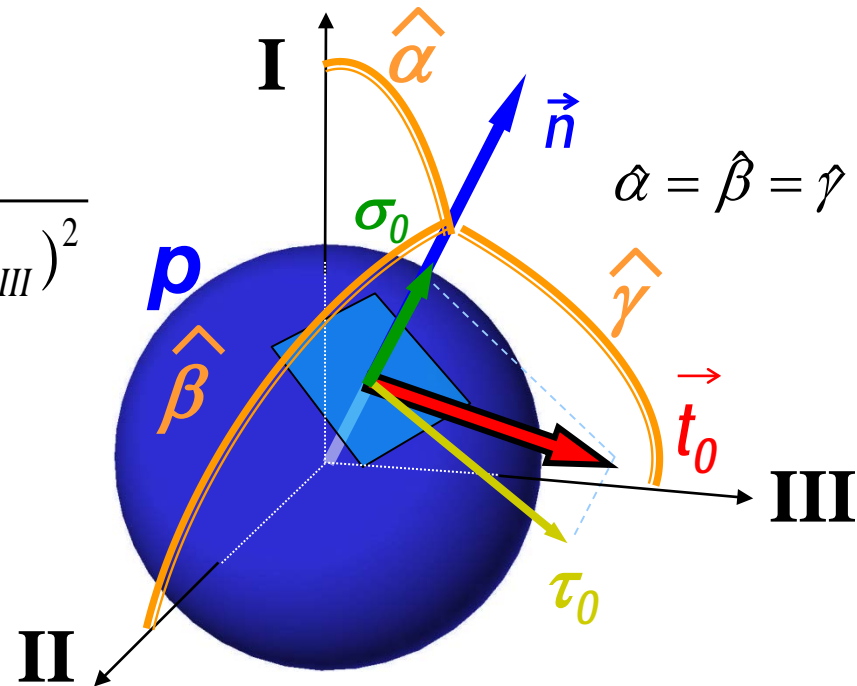
Component Esfèrica

Component Desviadora

$$\sigma_0 = \frac{tr[\sigma]}{3}$$

Tensions octaèdriques

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2}$$





## # Activitat 3.6

[Mentimeter](#)

### Test 07-04-2006 Qüestió 8:

8.- ¿Quina afirmació és falsa?

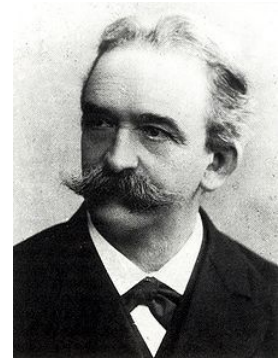
- A) La component desviadora d'un tensor no sempre té traça nul·la.
- B) El canvi de forma d'un medi continu no depèn dels eixos de referència.
- C) El canvi de volum d'un medi continu no depèn dels eixos de referència.
- D) La component esfèrica d'un tensor sempre té seva mateixa traça.

Quina és falsa, per què i per què són correctes les altres.

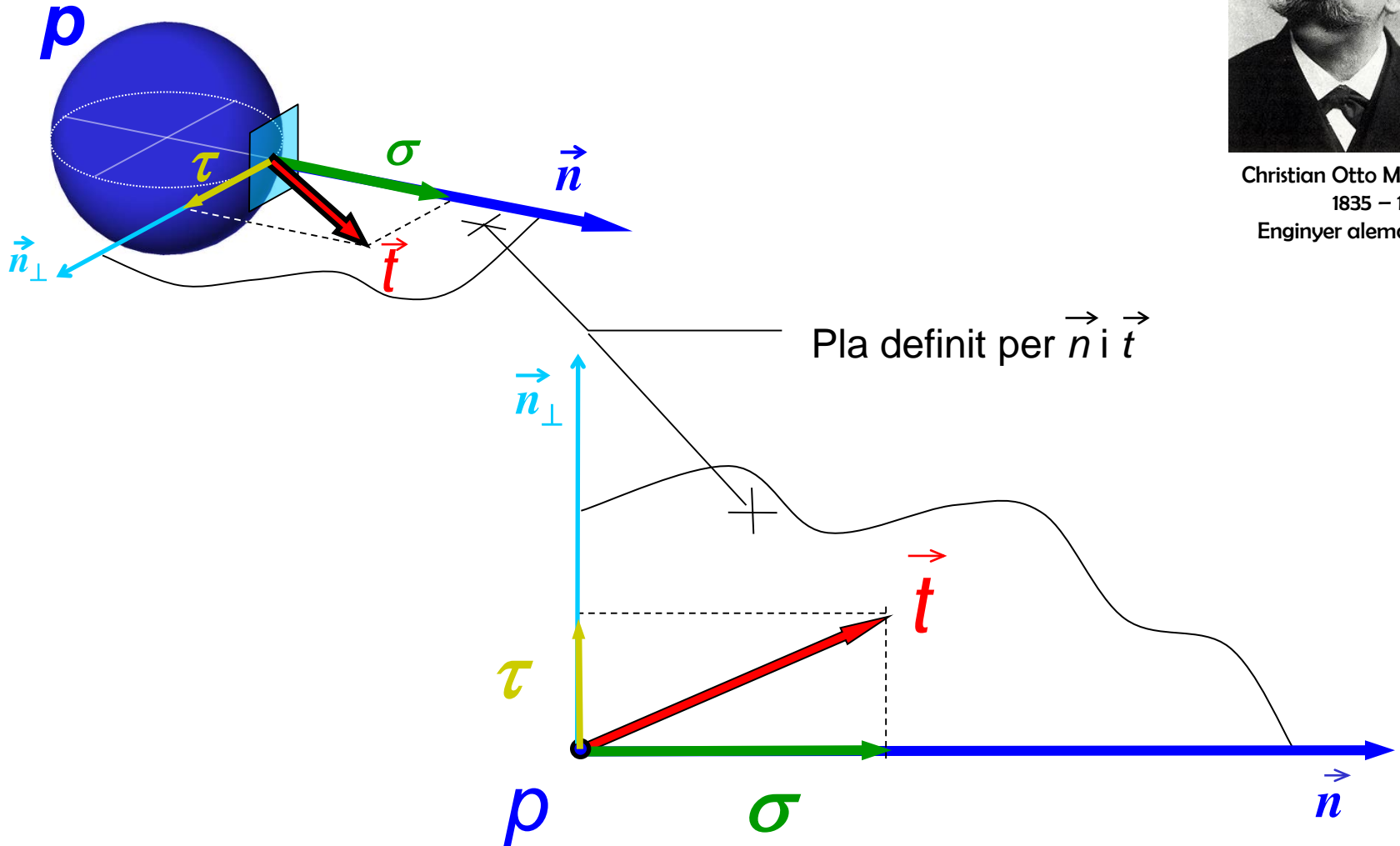


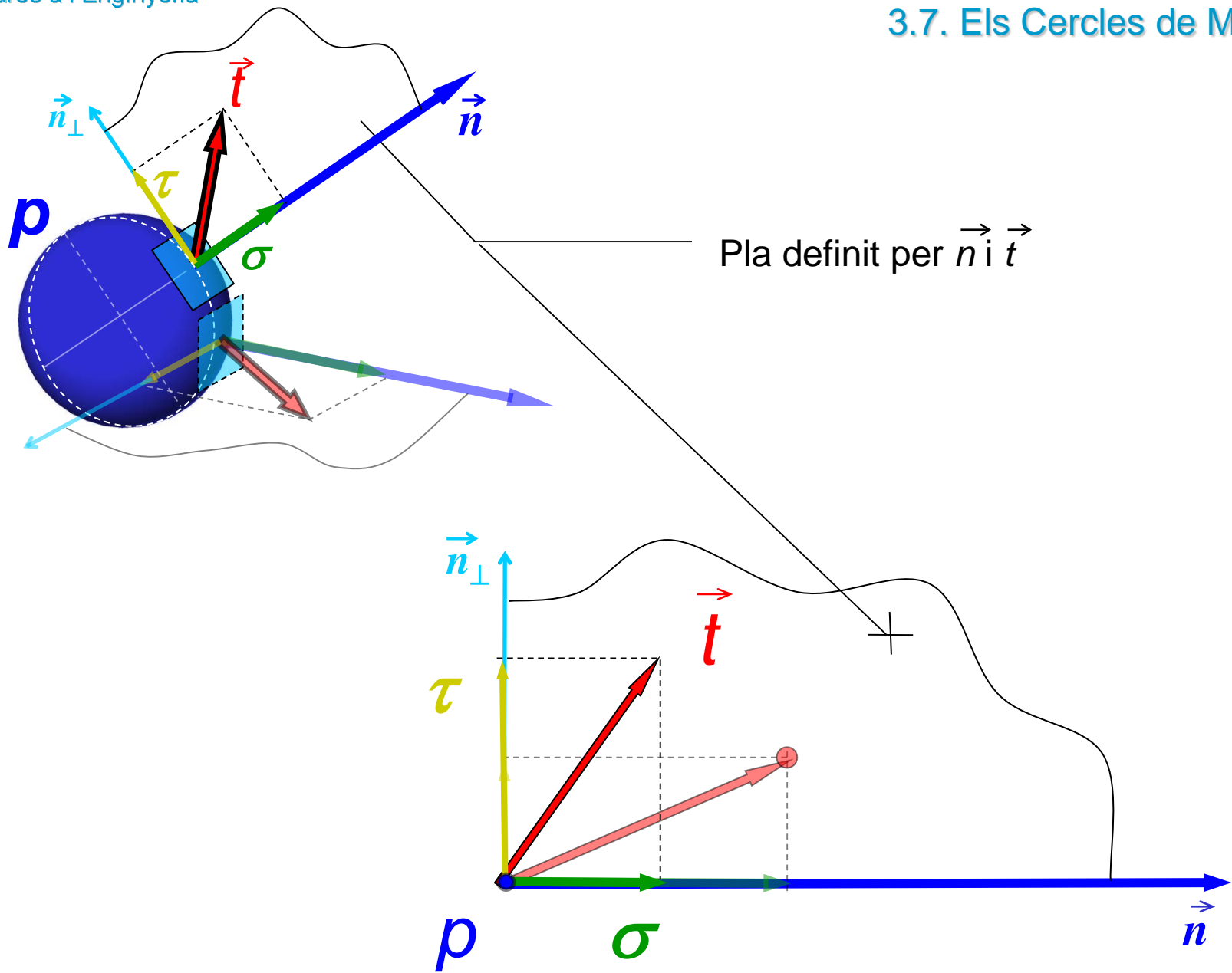
### 3.7. Els Cercles de Mohr

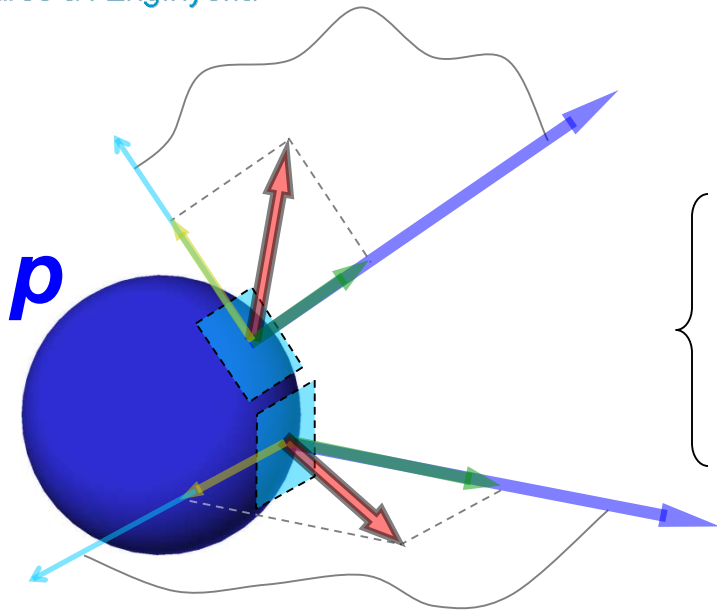
(representació plana d'una magnitud tensorial)



Christian Otto Mohr  
1835 – 1918  
Enginyer alemany

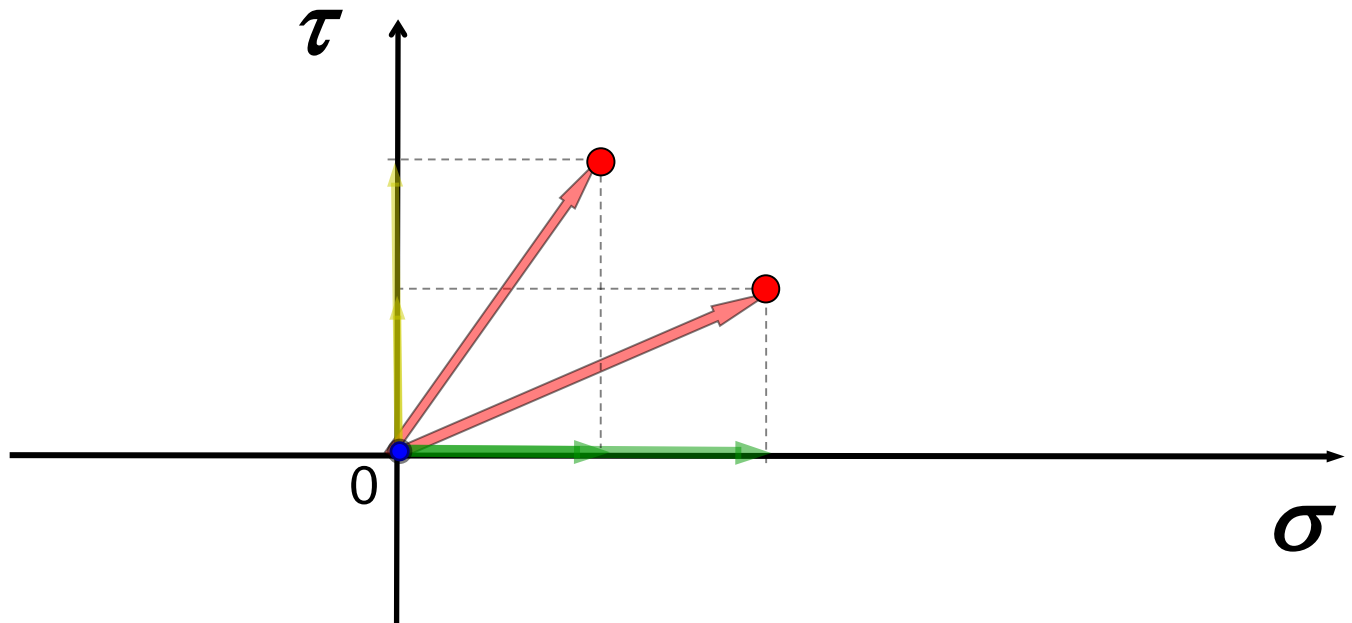






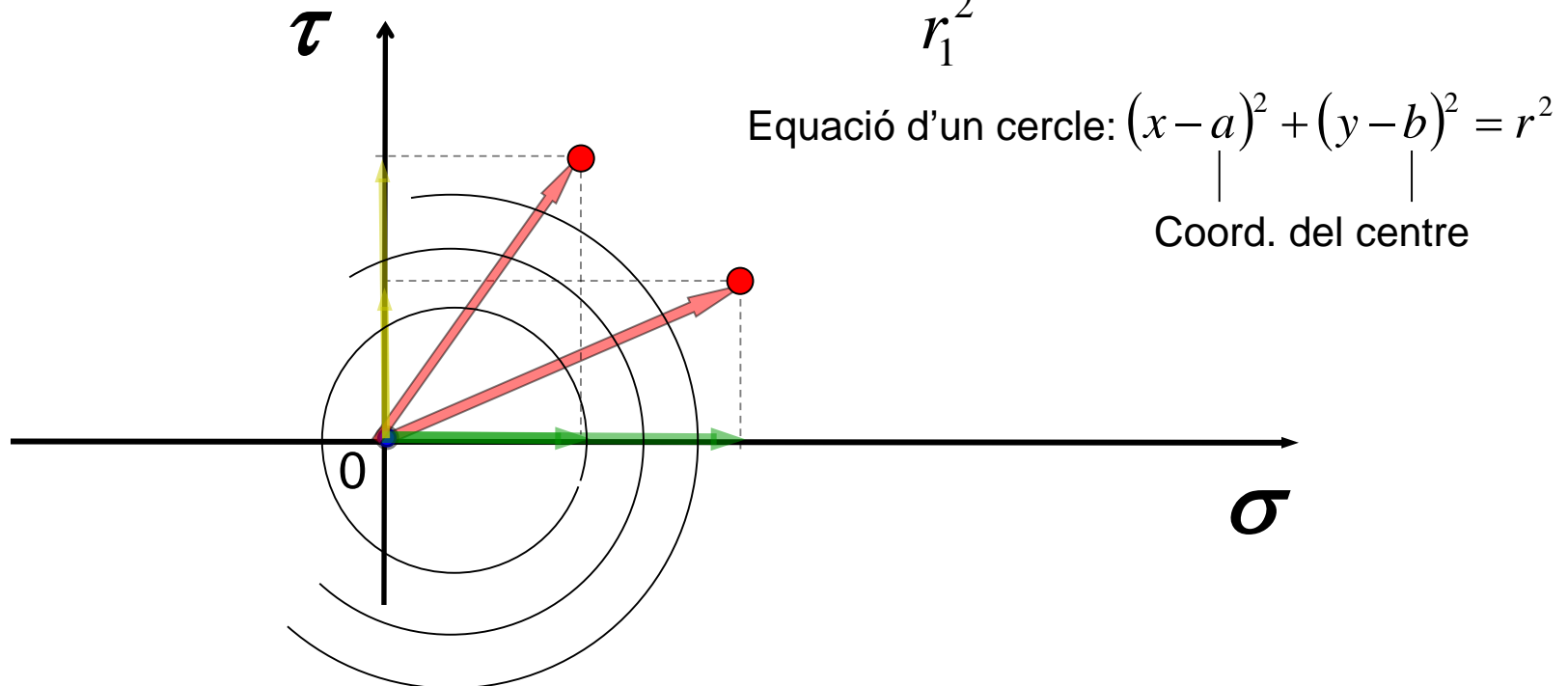
Matemàticament:

$$\left\{ \begin{aligned} t^2 &= \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \\ \vec{t} \cdot \vec{n} &= \sigma = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ 1 &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{aligned} \right.$$



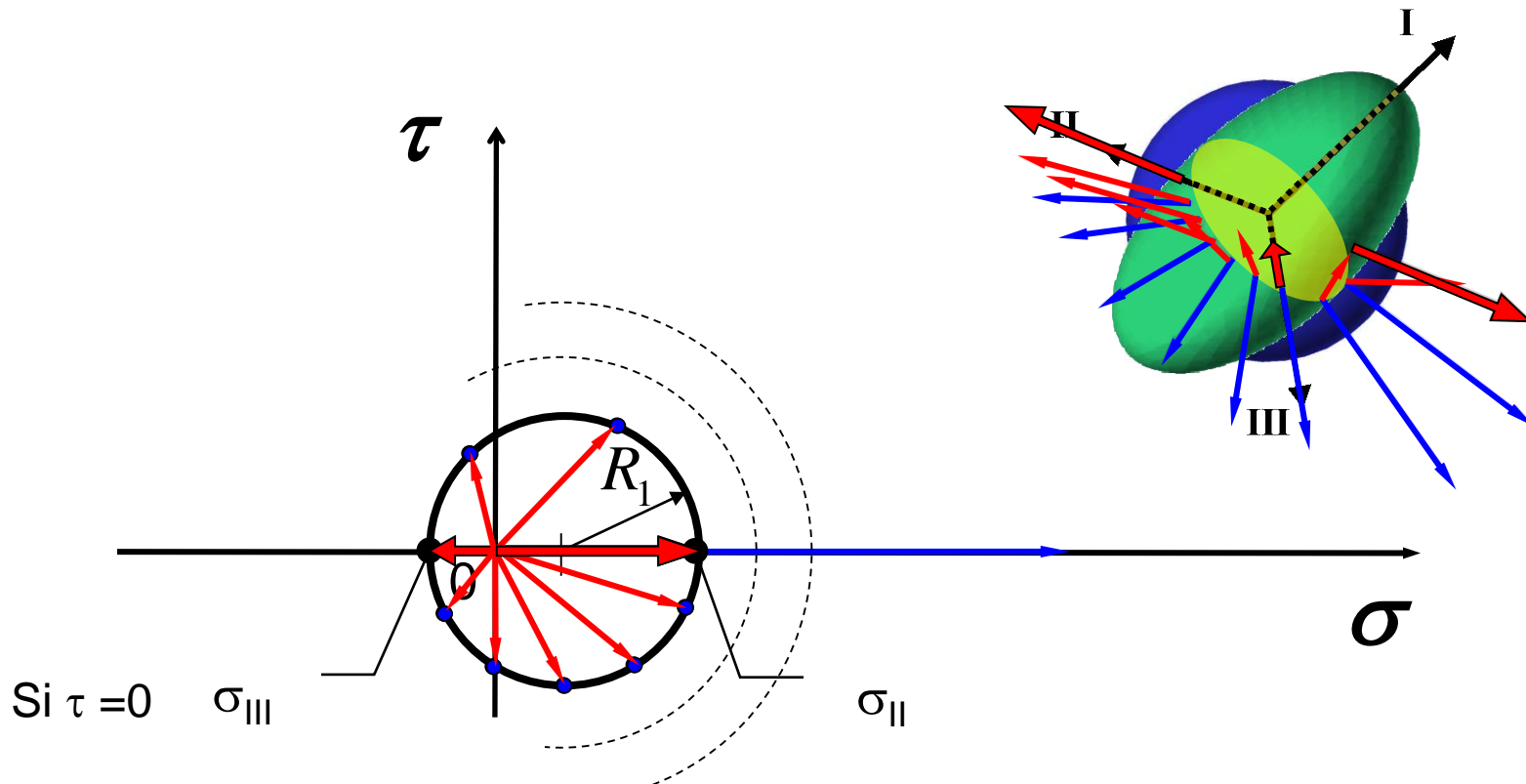
Eliminant successivament entre aquestes equacions  $n_2^2$  i  $n_3^2$  ens queda la família de cercles:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \underbrace{\left( \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}_{r_1^2} = r_1^2$$



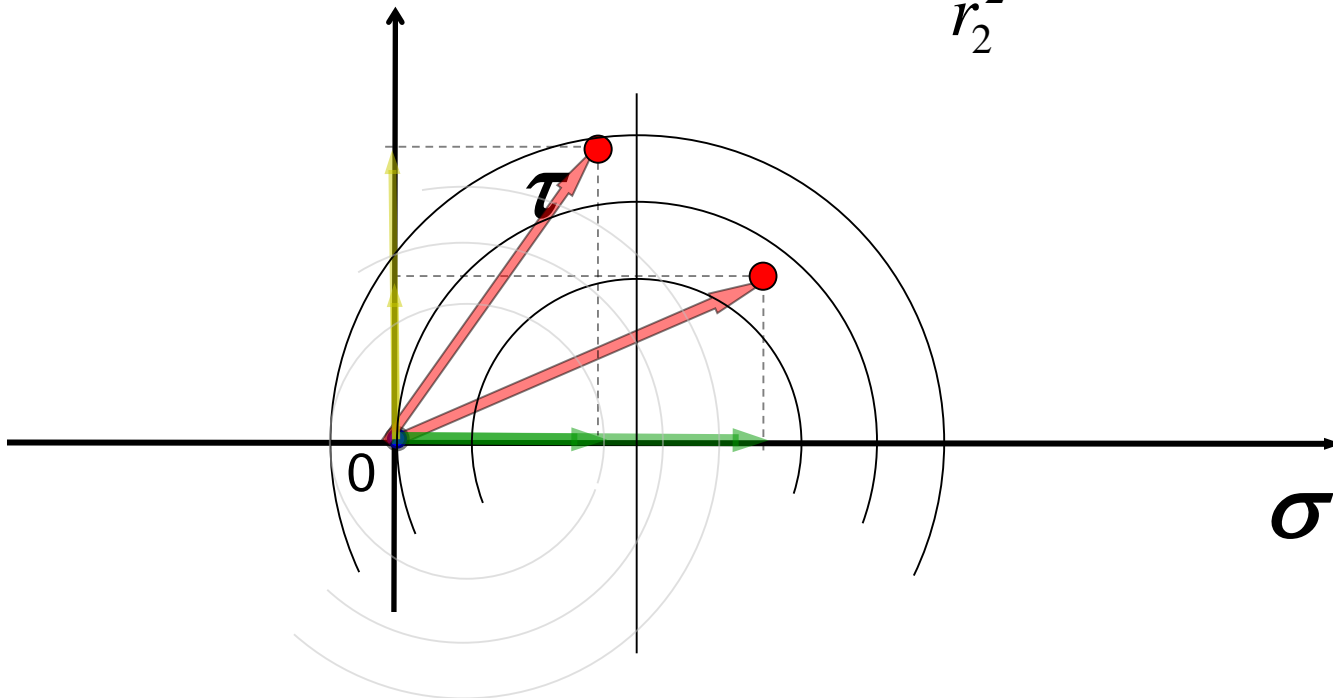
Per a  $n_1 = 0$ , direccions contingudes al pla II-III:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 = R_1^2 \quad R_1 < r_1$$



Eliminant successivament entre aquestes equacions  $n_1^2$  i  $n_3^2$

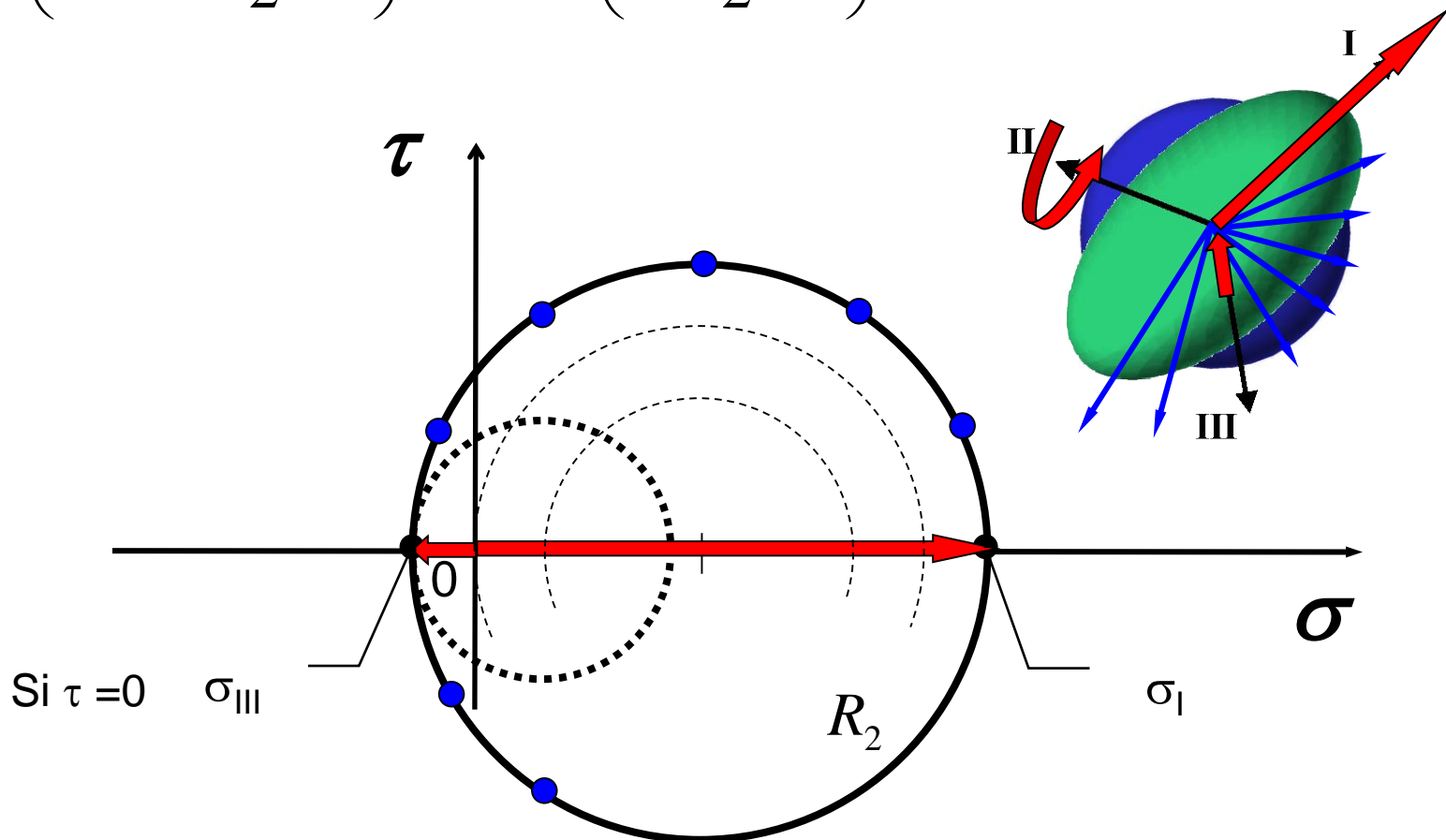
$$\left( \sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \underbrace{\left( \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - n_2^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II})}_{r_2^2} = r_2^2$$





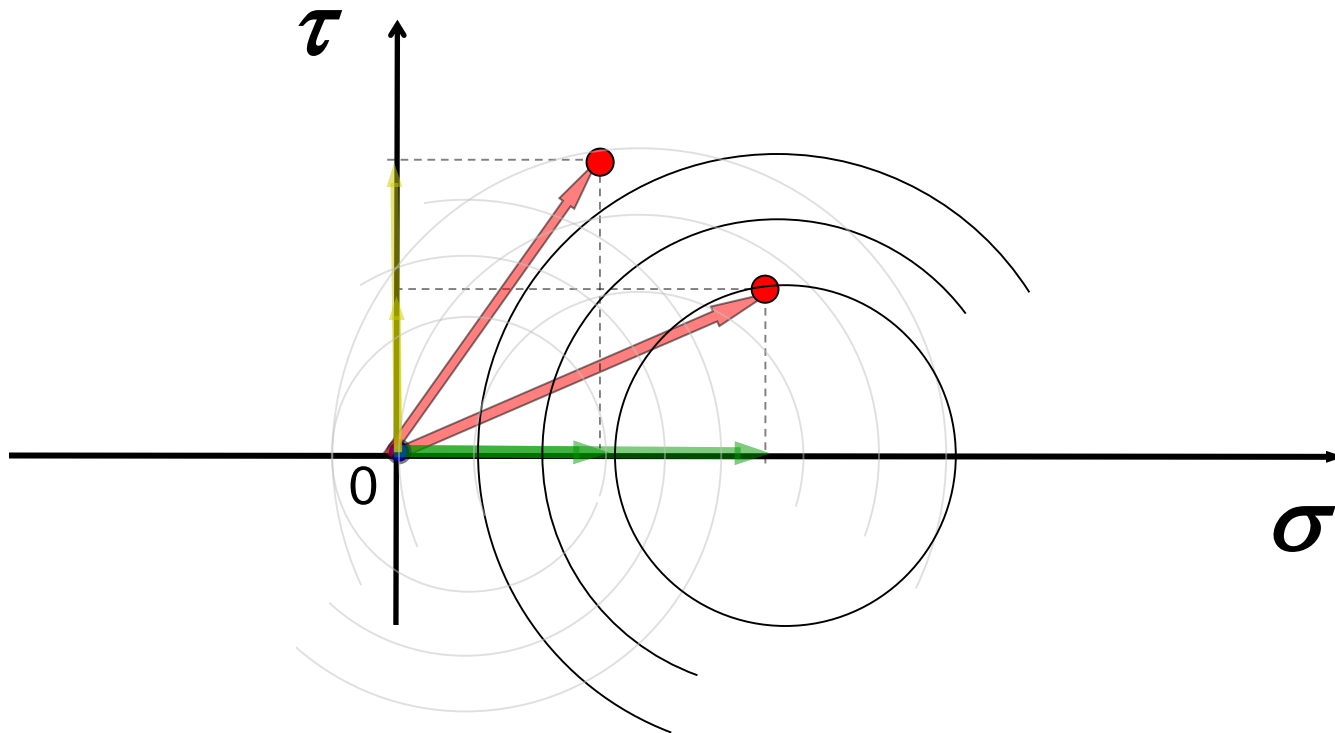
Per a  $n_2 = 0$ , direccions contingudes al pla I-III:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 = R_2^2 \quad R_2 > r_2$$



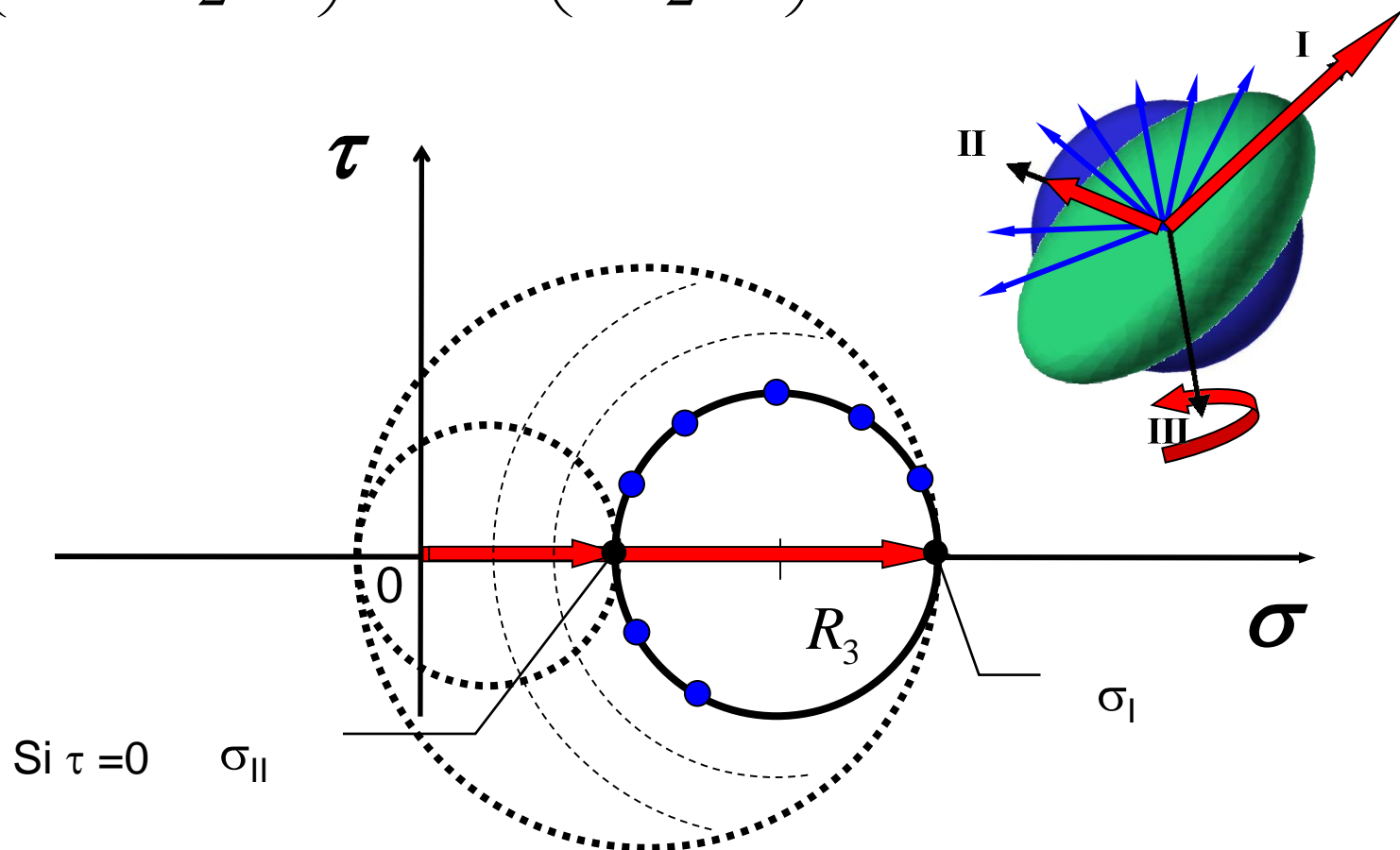
Eliminant successivament entre aquestes equacions  $n_1^2$  i  $n_2^2$

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 + n_3^2 (\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) = r_3^2$$

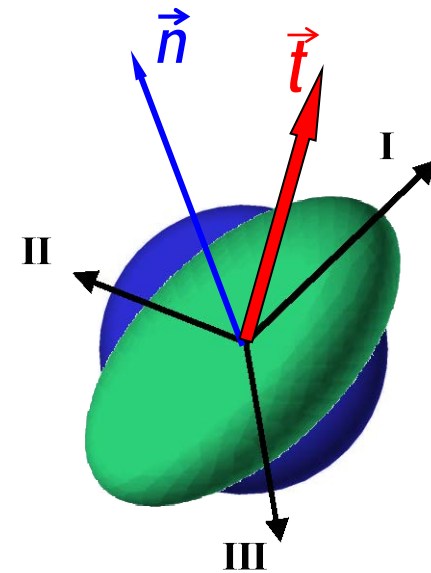
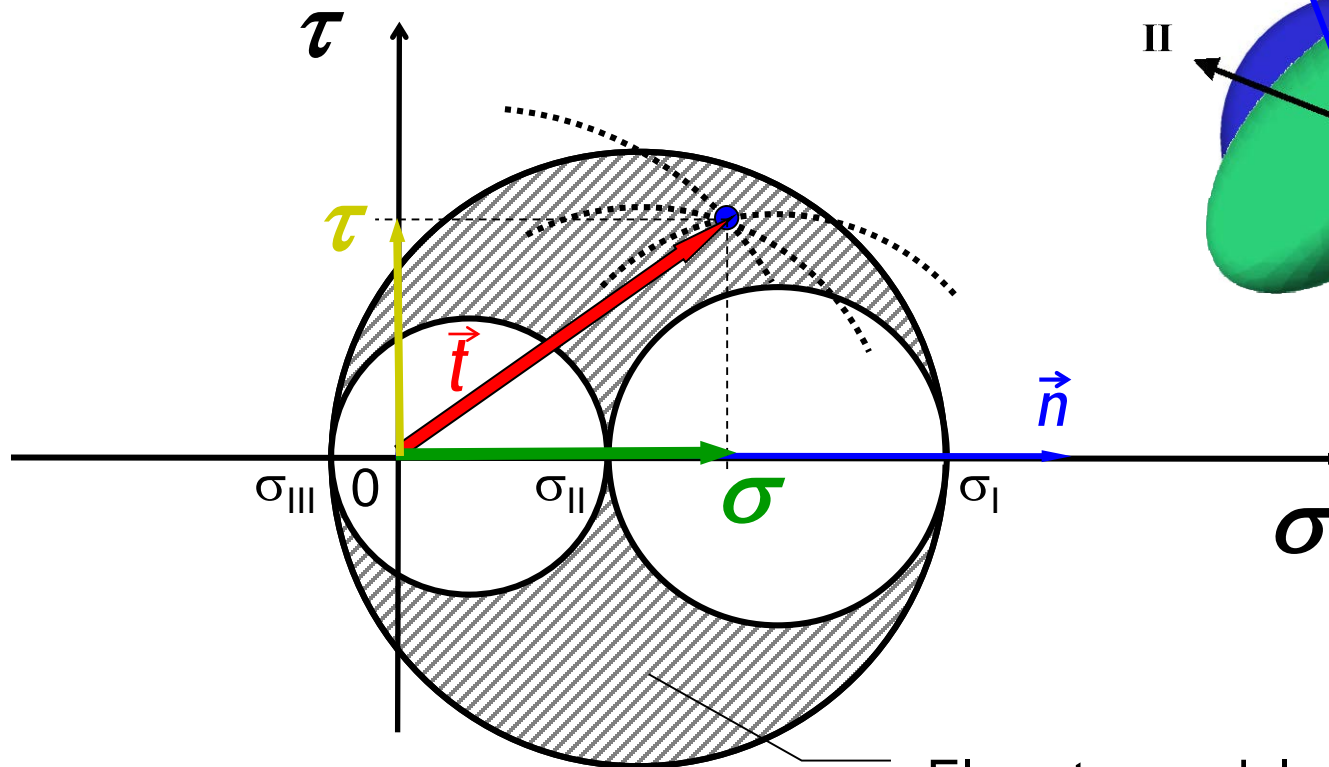


Per a  $n_3 = 0$ , direccions contingudes al pla I-II:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 = R_3^2 \quad R_3 < r_3$$



Per a una direcció qualsevol,  $n_1, n_2, n_3$ ,  
trobem  $r_1, r_2, r_3$ ,



Els extrems dels vectors tensió ocupen la zona ratllada



## # Activitat 3.7

[Mentimeter](#)

### Test 09-04-2003 Qüestió 10:

10.- Quants vectors tensió  $\vec{t}$  tenen com a component intrínseca normal,

el valor  $\sigma_0 = \frac{tr[\sigma]}{3}$  ?

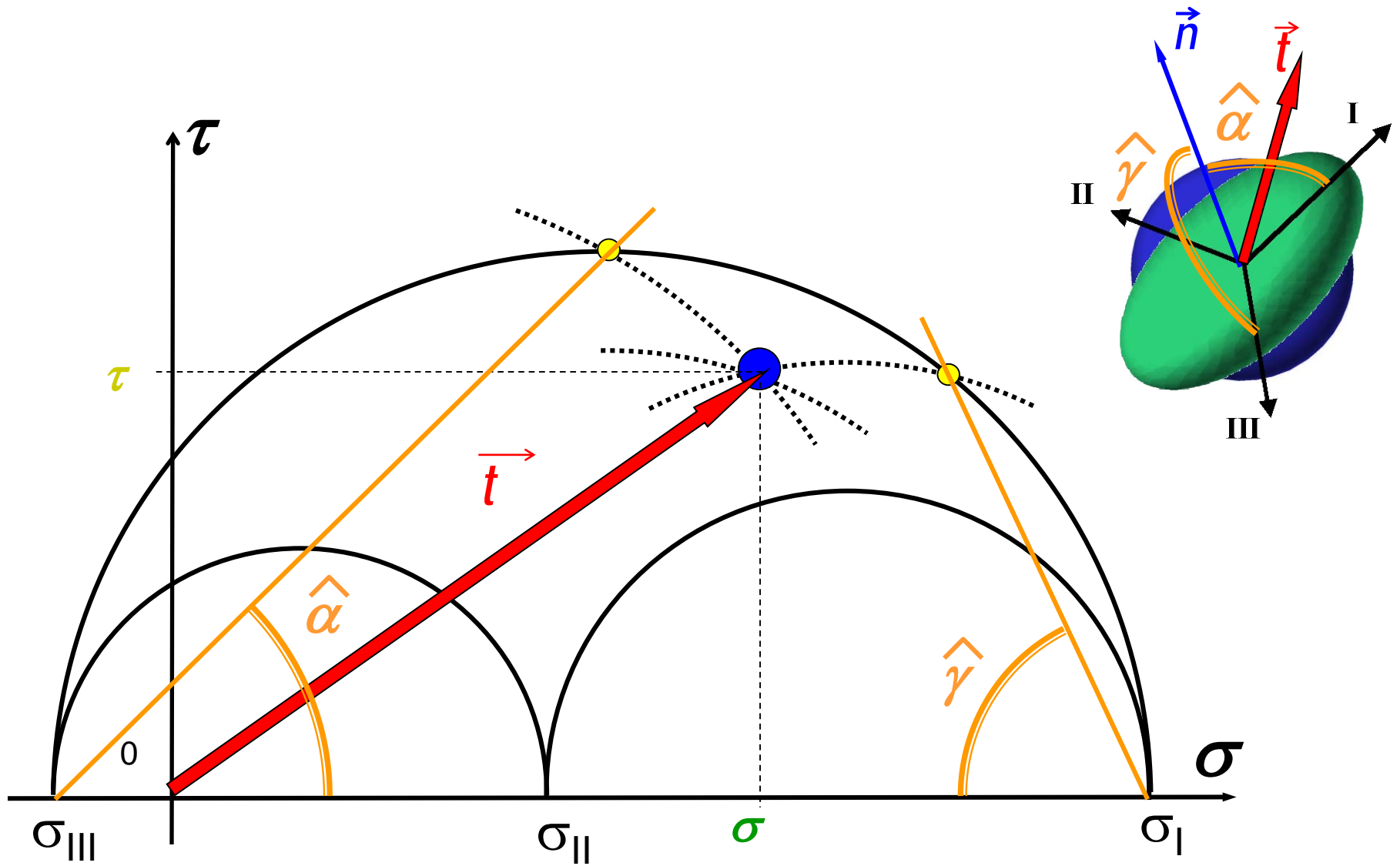
- A) Només 8, els que actuen sobre els plans octaèdrics.
- B) 8 com a molt.
- C) Tots, pe ser  $[\sigma_0]$  un tensor esfèric.
- D) Infinites.

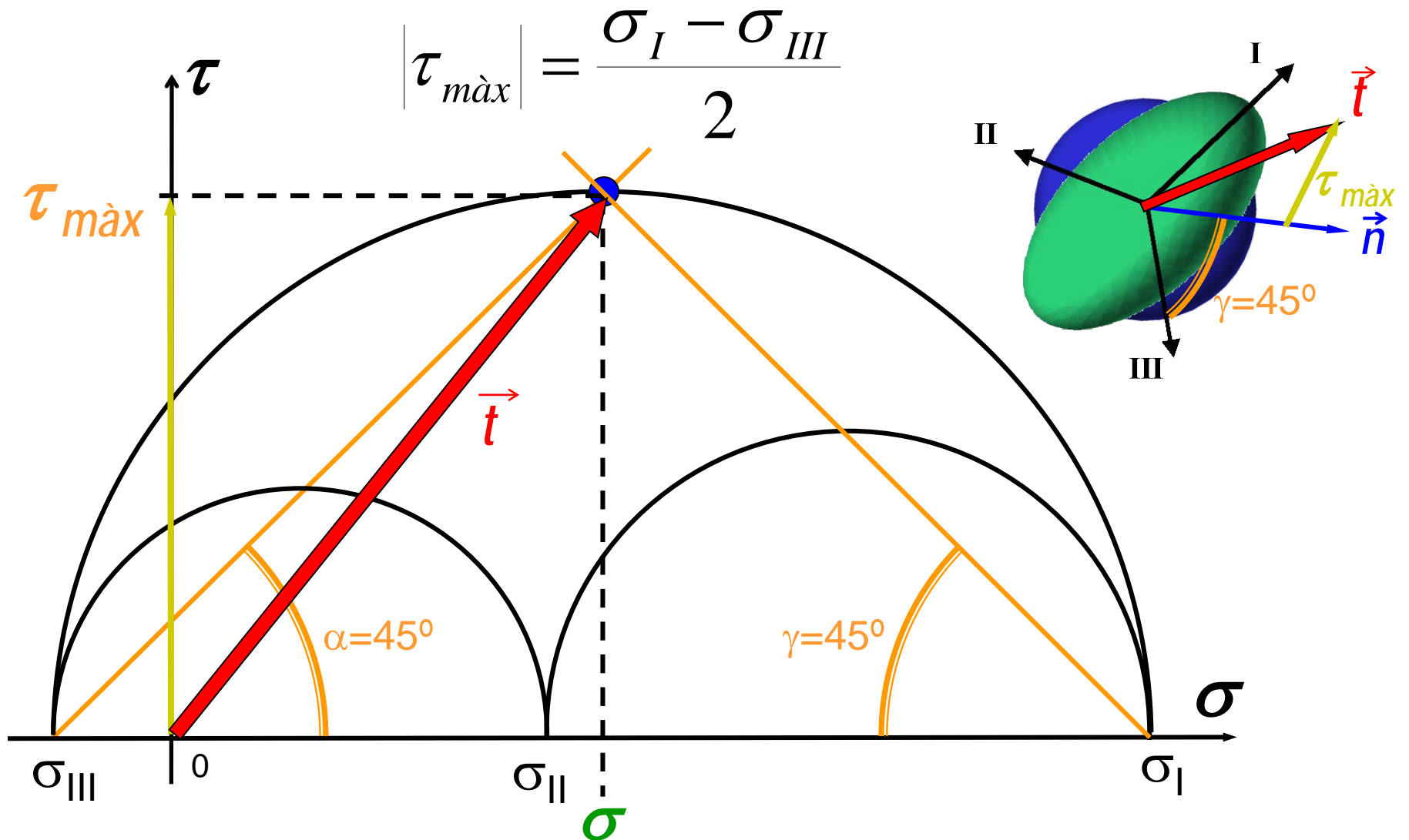
### Test 07-04-2006 Qüestió 7:

7.- El tensor tensió està constituït per tres vectors tensió:

- A) que actuen sobre tres plans perpendiculars entre sí, expressats en una base qualsevol.
- B) perpendiculars entre sí, expressats en la base formada pels eixos de referència.
- C) qualsevol, sempre que els seus extrems quedin dins de l'àrea delimitada pels cercles de Mohr de este estat de tensió.
- D) que actuen sobre els tres plans perpendiculars definits pels eixos de referència.

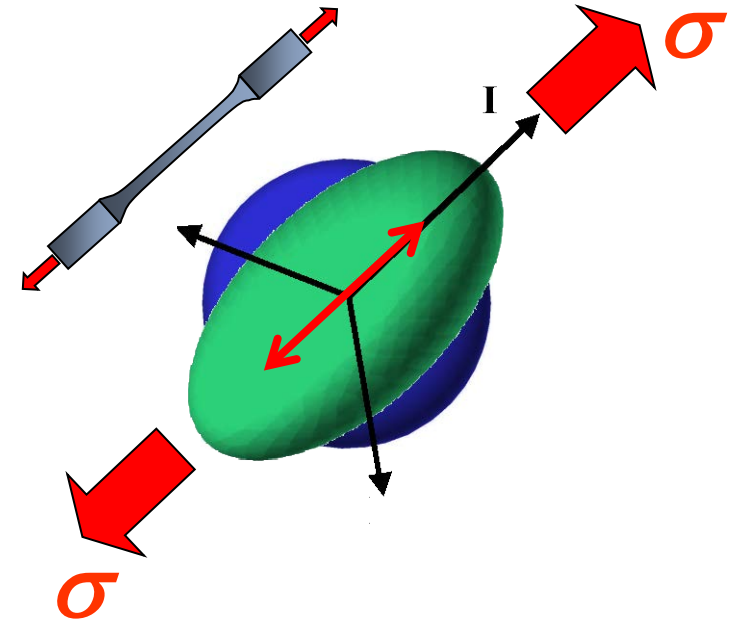
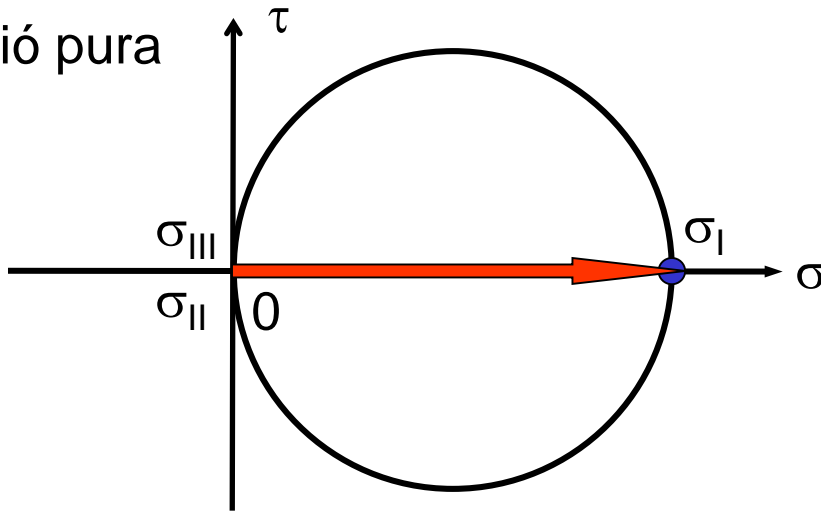
Quina és la correcta, per què i per què són falses les altres.



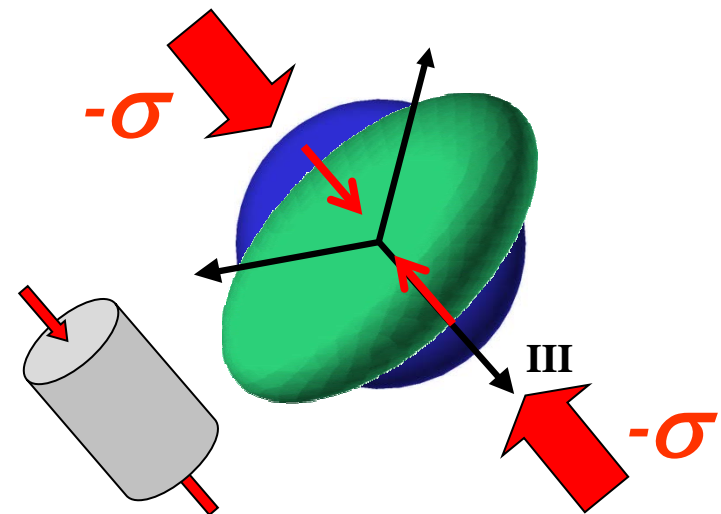
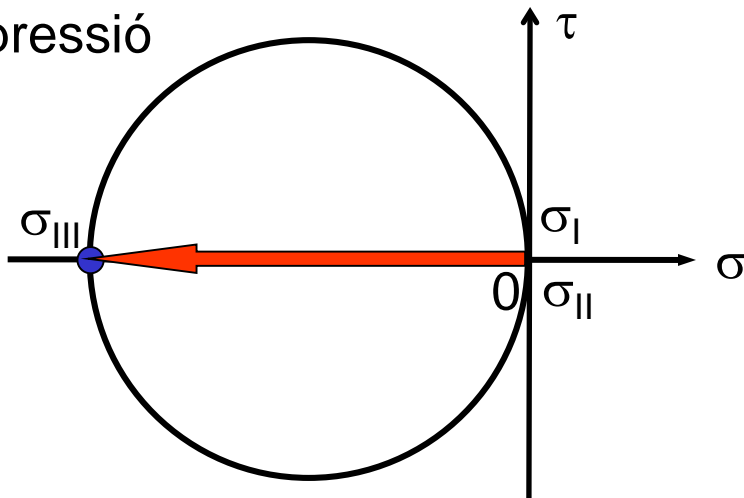


## Exemples:

Tracció pura



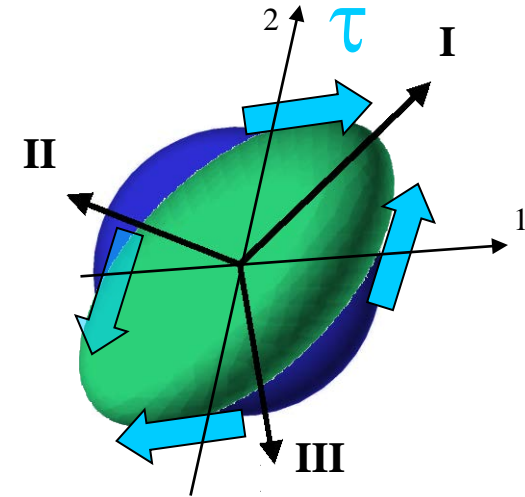
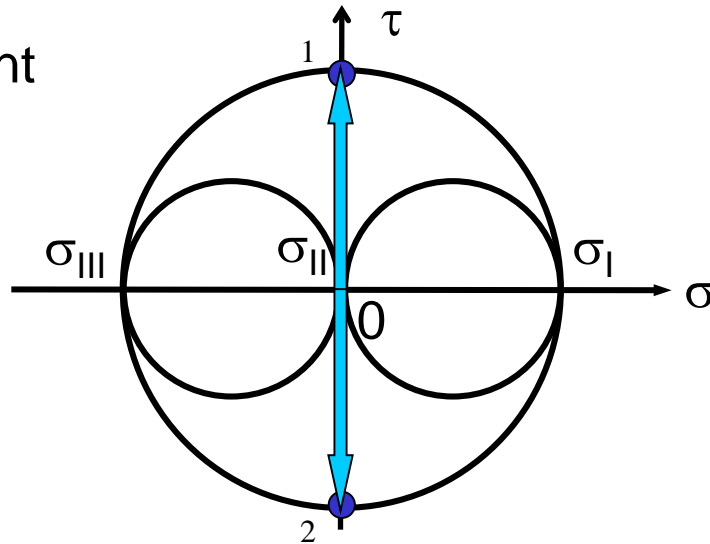
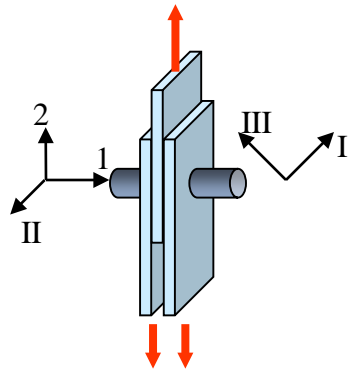
Compressió  
pura



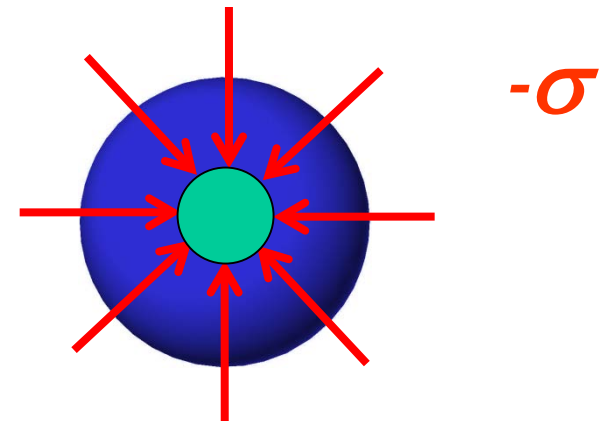
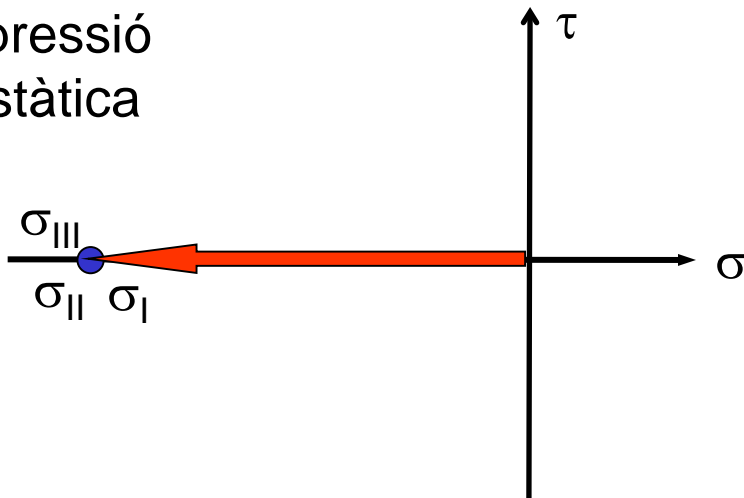


# Exemples:

Cisallament pur



Compressió hidrostàtica







### # Activitat 3.9

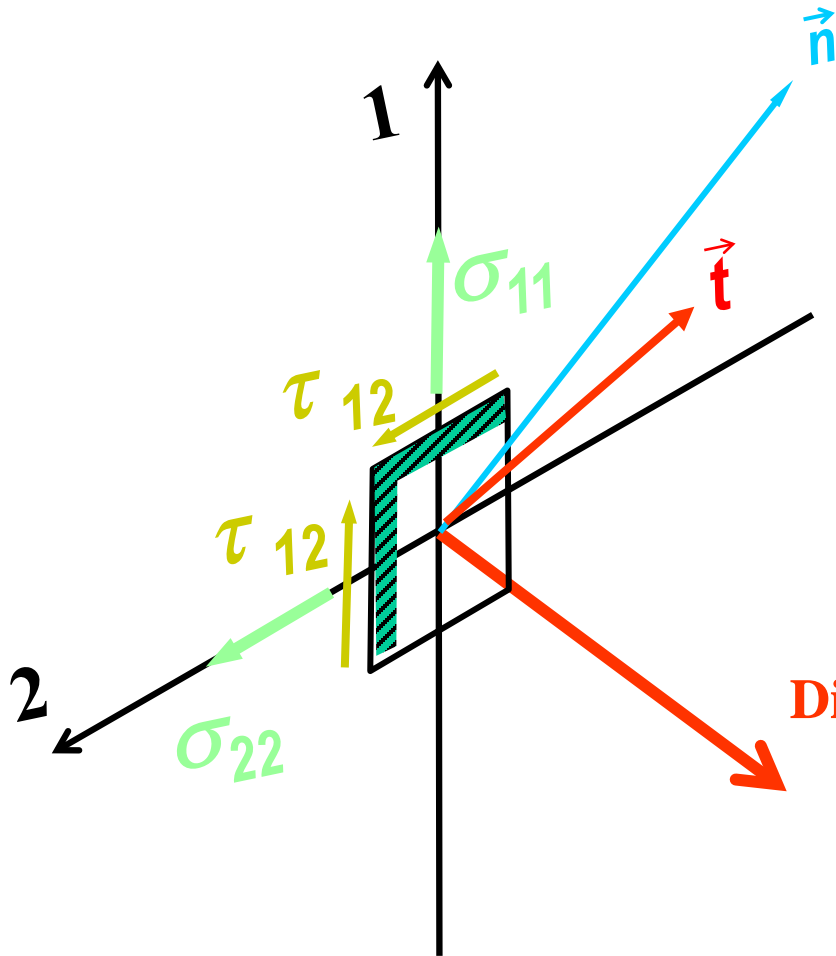
Obtenir les tensions principals corresponents a un punt amb un estat pla de tensió definit per:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Determinar també la tensió tallant màxima  $\tau_{màx}$

- Resoldre el problema analíticament i gràficament.

### 3.8. Estudi bidimensional de tensions i deformacions



$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

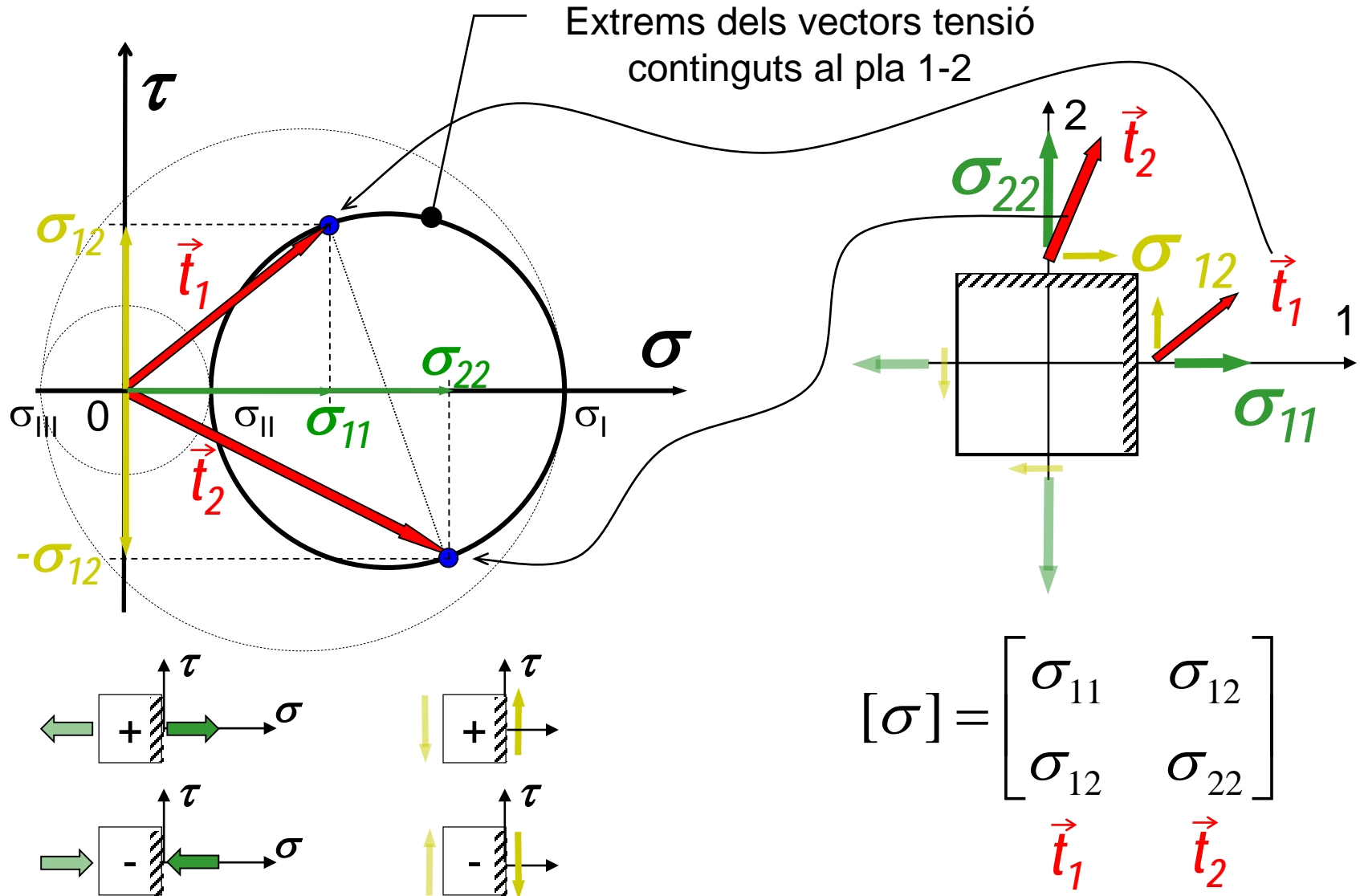
Els vectors tensió estan també continguts al pla 1-2

**Direcció Principal  
(I,II ò III)**

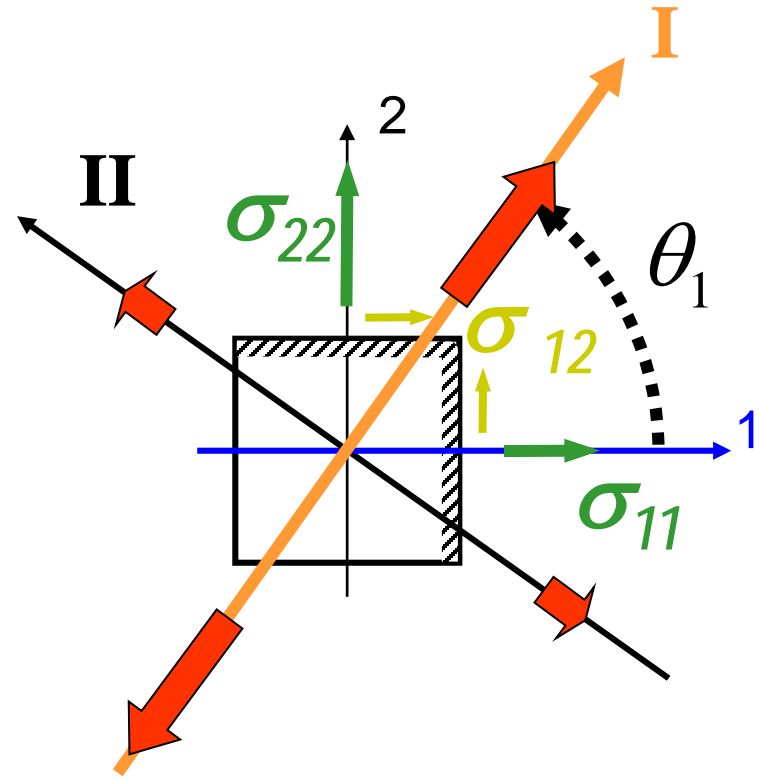
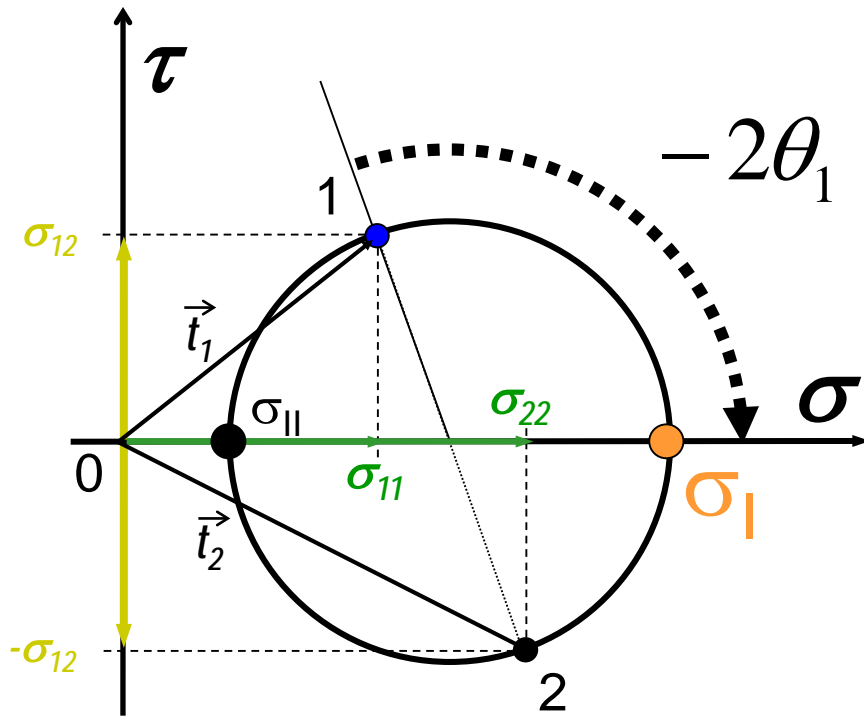
$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

**CERCLE DE MOHR**

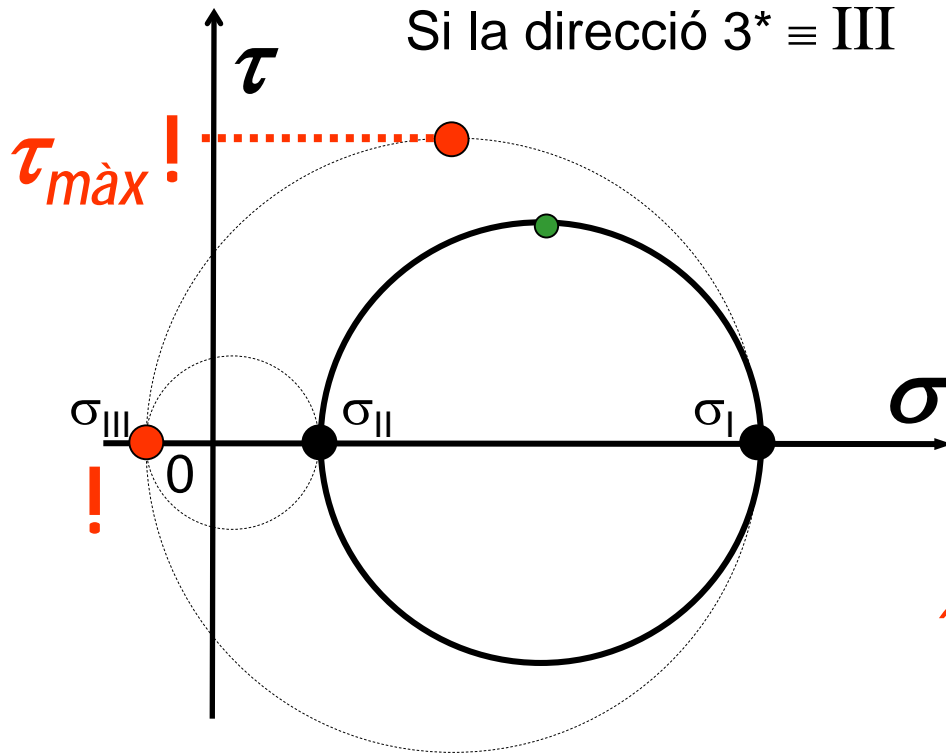
Si la direcció 3\*  $\equiv$  III:



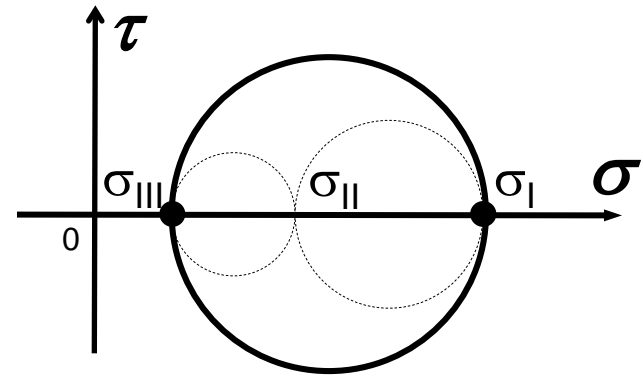
**CERCLE DE MOHR** (Si la direcció  $3^* \equiv \text{III}$ )



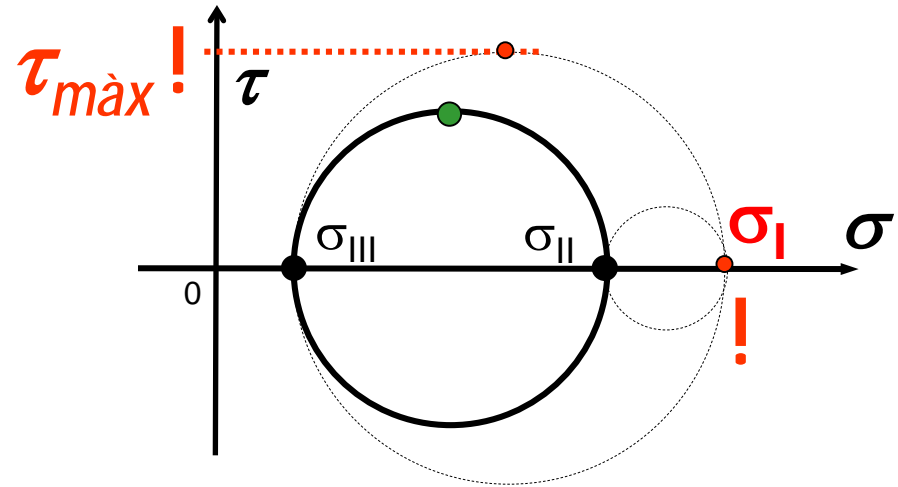
### CERCLE DE MOHR



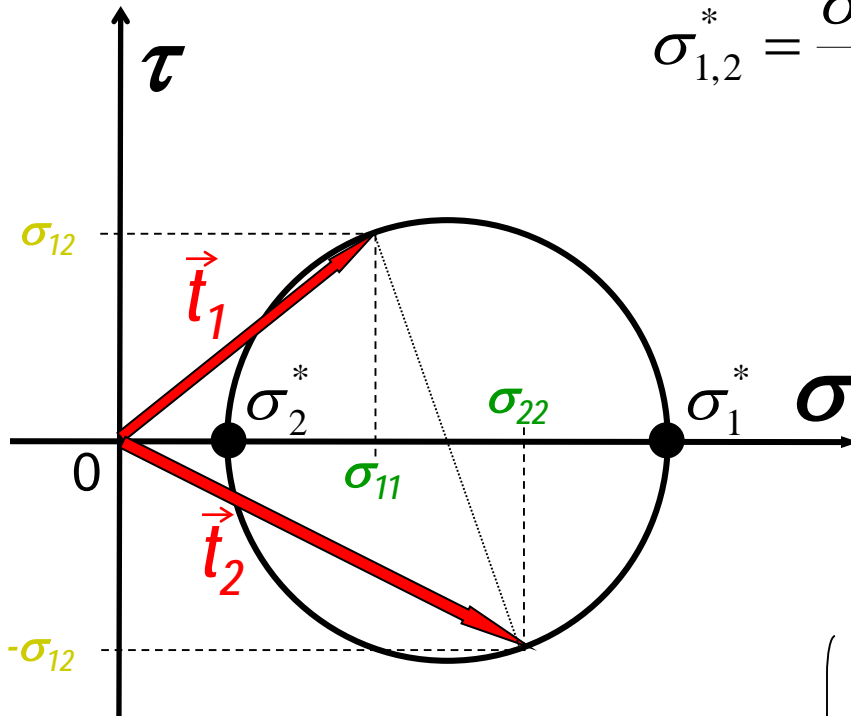
Si la direcció  $3^* \equiv \text{II}$



Si la direcció  $3^* \equiv \text{I}$



## Fórmules immediates



$$\sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\tan \theta_{1-1^*} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_2^*}$$

$$\tau_{\max}^{(pl1-2)} = \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 \\ 0 & \sigma_2^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2} + \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} \cos 2\theta_1 \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} \cos 2\theta_1 \\ \sigma_{12} = -\frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} \sin 2\theta_1 \end{cases}$$



## # Activitat 3.10

### Test 07-04-2006 Qüestió 5:

5.- El cercle de Mohr de la figura correspon a l'estat de tensió d'un medi continu en el pla 1-2. Sabent que els plans on actuen les tensions tangencials màximes, formen un angle  $\alpha$  amb els eixos 1-2, determinar gràficament l'expressió del tensor tensió en aquesta base.

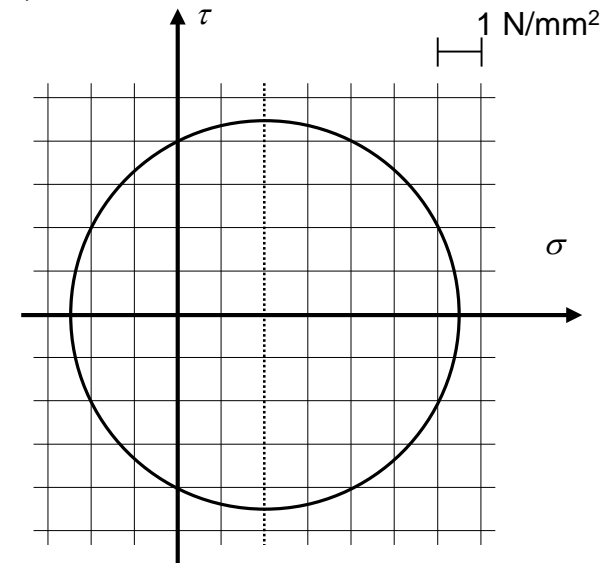
Dato:  $\tan 2\alpha = 1/2$

A)  $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

B)  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

C)  $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

D) Ninguna de las anteriores



## # Activitat 3.11

Una placa plana quadrada de 2m de costat i 5cm de gruix està sotmesa a un estat pla de tensió tal que: ( $x_1, x_2$  en cm i  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  en daN/cm<sup>2</sup>)

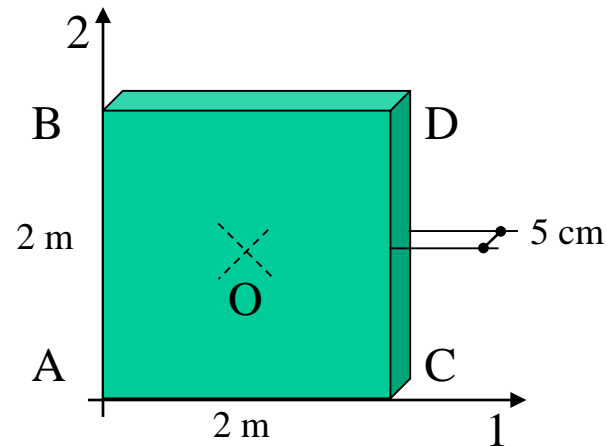
$$\sigma_{11} = 2x_2$$

$$\sigma_{22} = 4x_1$$

$$\sigma_{12} = x_1$$

Determinar:

- 1) Les forces exteriors aplicades
- 2) Trobar la tensió tallant màxima  $\tau_{màx}$  al centre de la placa.



## # Activitat 3.12

### ## Entregable 8

(límit 1 setmana)

#### MECÁNICA DE MEDIS CONTINUS

Permutació 1

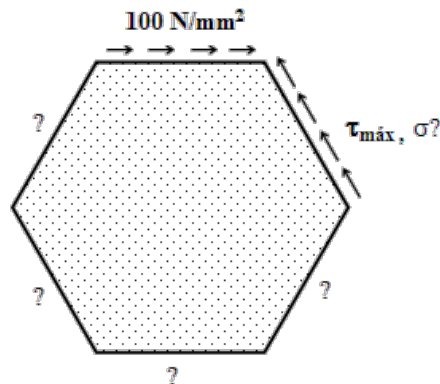
Temps 70 min

#### PROBLEMA 2

Punts 10

17.06.05

Pes: 1



Una chapa de acero de 1 mm de espesor y forma hexagonal sufre un estado tensional plano y constante en todos sus puntos, provocado por ciertas fuerzas de superficie aplicadas a cada uno de sus lados. Sabiendo que:

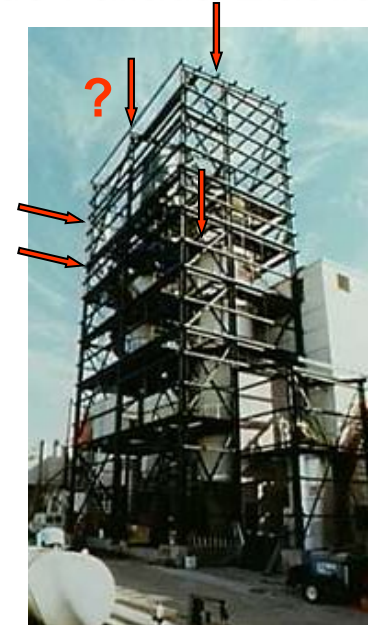
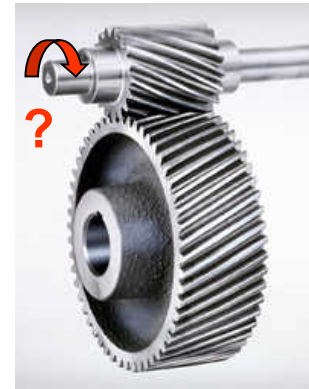
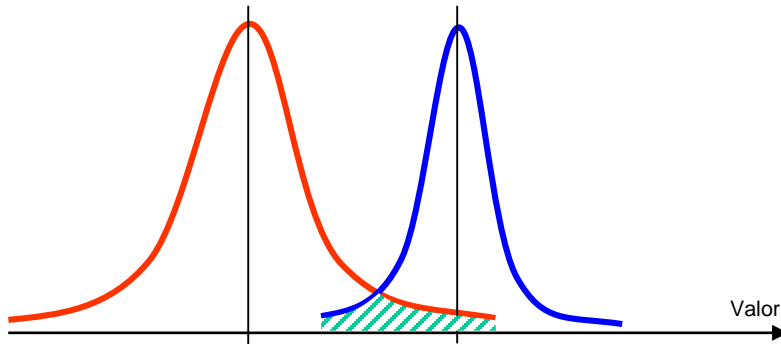
- sobre un lado, la componente normal de la fuerza de superficie es nula y la tangencial  $100 \text{ N/mm}^2$
  - sobre otro de ellos actúa la componente tangencial máxima
- se pide:

- a) Representar los 3 círculos de Mohr de tensión, graficando sobre ellos los vectores tensión que actúan en las seis caras del hexágono.
- b) Calcular las tensiones y direcciones principales y dibujarlas sobre la pieza identificando los planos sobre los que actúan.
- c) Determinar la expresión del tensor tensión en la base formada por la dirección horizontal, la dirección vertical y la normal a ambas.
- d) Calcular y representar gráficamente las fuerzas de superficie normales y tangenciales sobre todas y cada una de las caras del hexágono.



# PUNT DE DISSENY I SEGURETAT

Sol·licitacions ?



**RISC ↔ SEGURETAT**

Resistències ?





## **PUNT DE DISSENY I SEGURETAT**

### **SOL-LICITACIONS**

- Difícils de quantificar
- Difícil predicció de canvis al llarg del temps
- Vent, sismes, .... funcions de probabilitat
- Valors aproximats de càlcul

### **RESISTÈNCIA**

- Variabilitat en les propietats dels materials
- No sempre els assaigs reproduïxen la situació real del material
- El material s'altera amb el temps
- Valors aproximats de càlcul

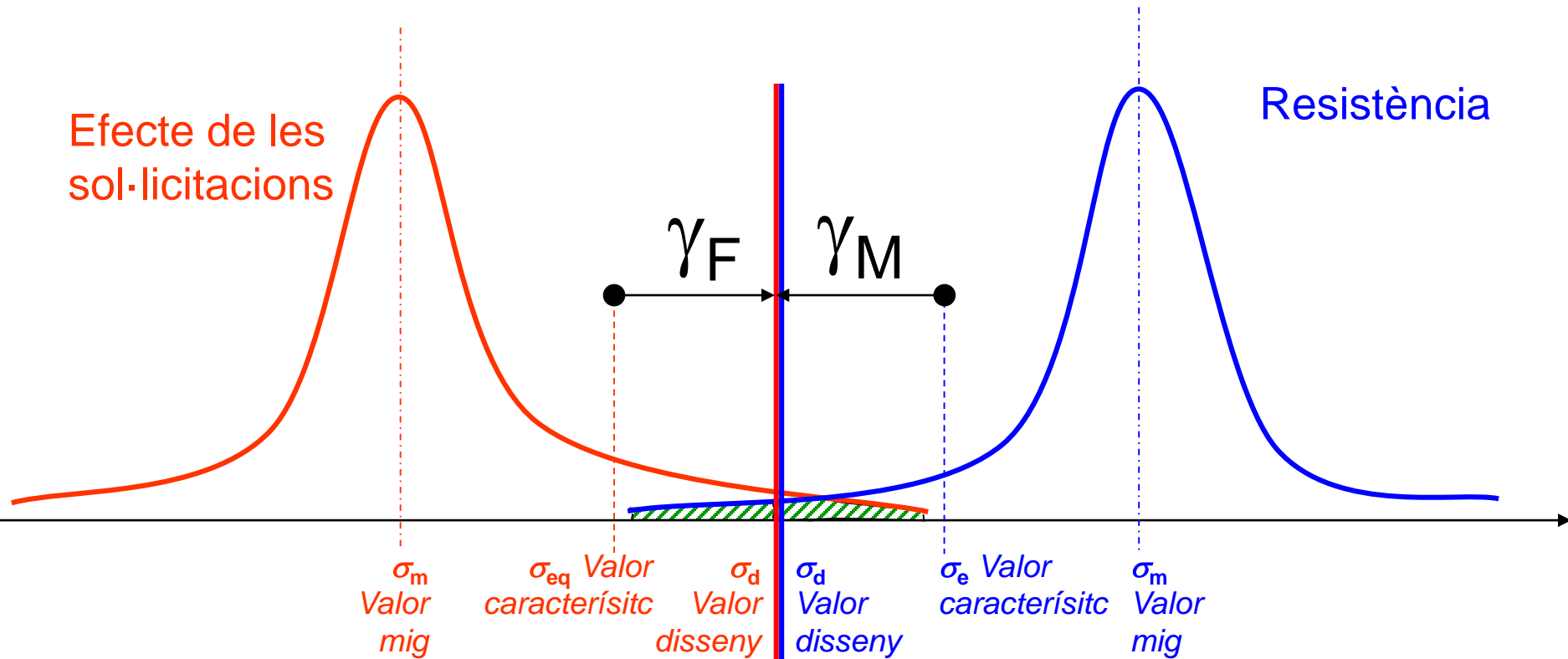
### **RISC**

- Risc assumible, funció de les repercussions d'una possible fallada



Efecte de les sol·licitacions

Resistència



$\gamma_F$ : MAJORACIÓ  
de sol·licitacions

$\gamma_M$ : MINORACIÓ  
de resistència dels  
materials

**PROBABILITAT DE  
FALLADA**

## COEFICIENT DE SEGURETAT

$$\frac{\sigma_e}{\gamma_M} \geq \sigma_{eq} \cdot \gamma_F$$

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \gamma_S$$

$$\geq \gamma_M \gamma_F$$

Habitualment fixats per normatives

$$\gamma_M \gamma_F < \gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$

Seguretat afegida, risc mínim

$$\gamma_S = \gamma_M \gamma_F$$

Seguretat mínima coberta per normatives

$$1 < \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \gamma_S < \gamma_M \gamma_F$$

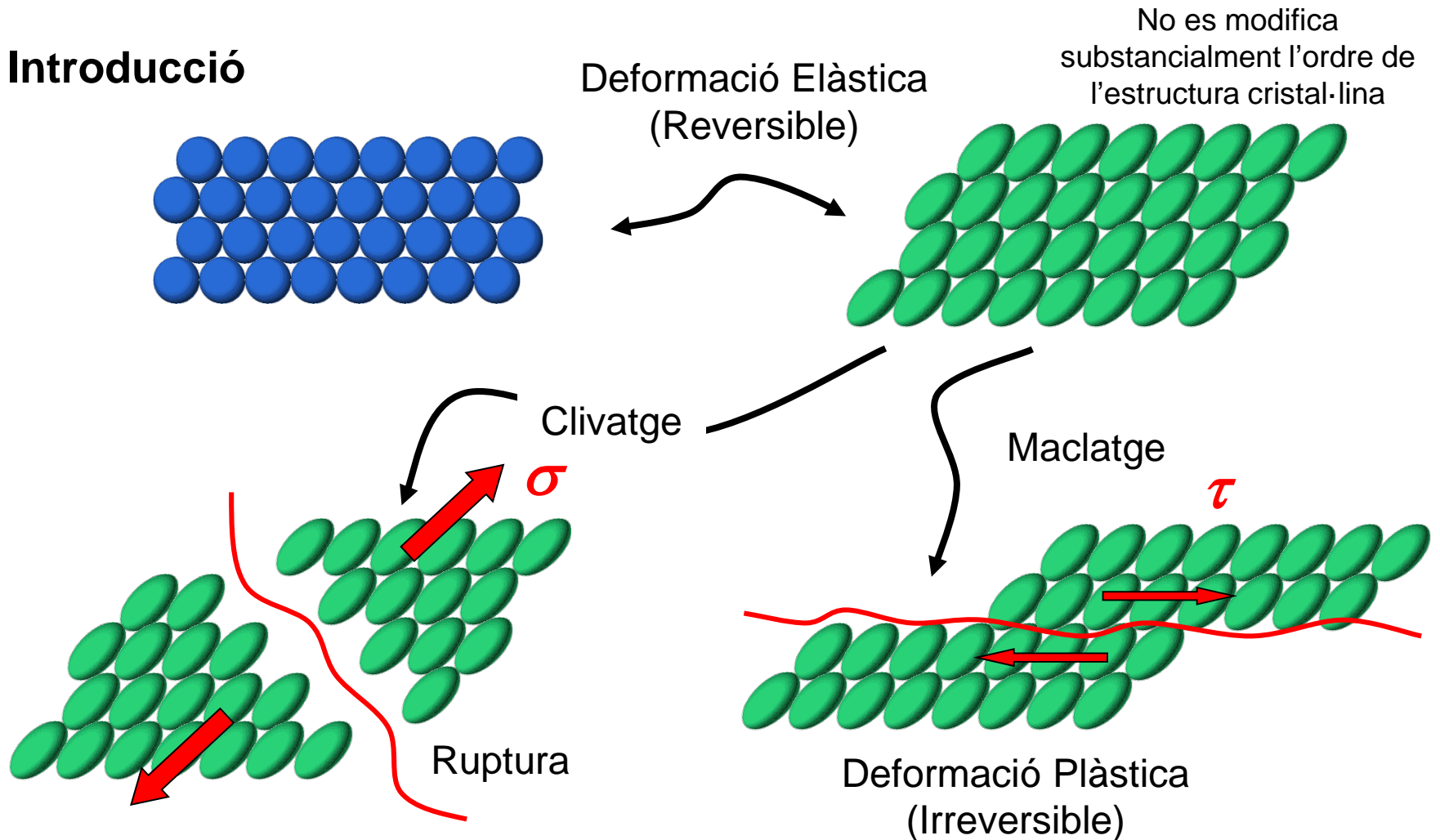
Risc alt, sota responsabilitat de l'enginyer

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \gamma_S < 1$$

Risc molt alt, perill, fallada molt probable

## 5.4. Criteris de Fallada Elàstica

### Introducció

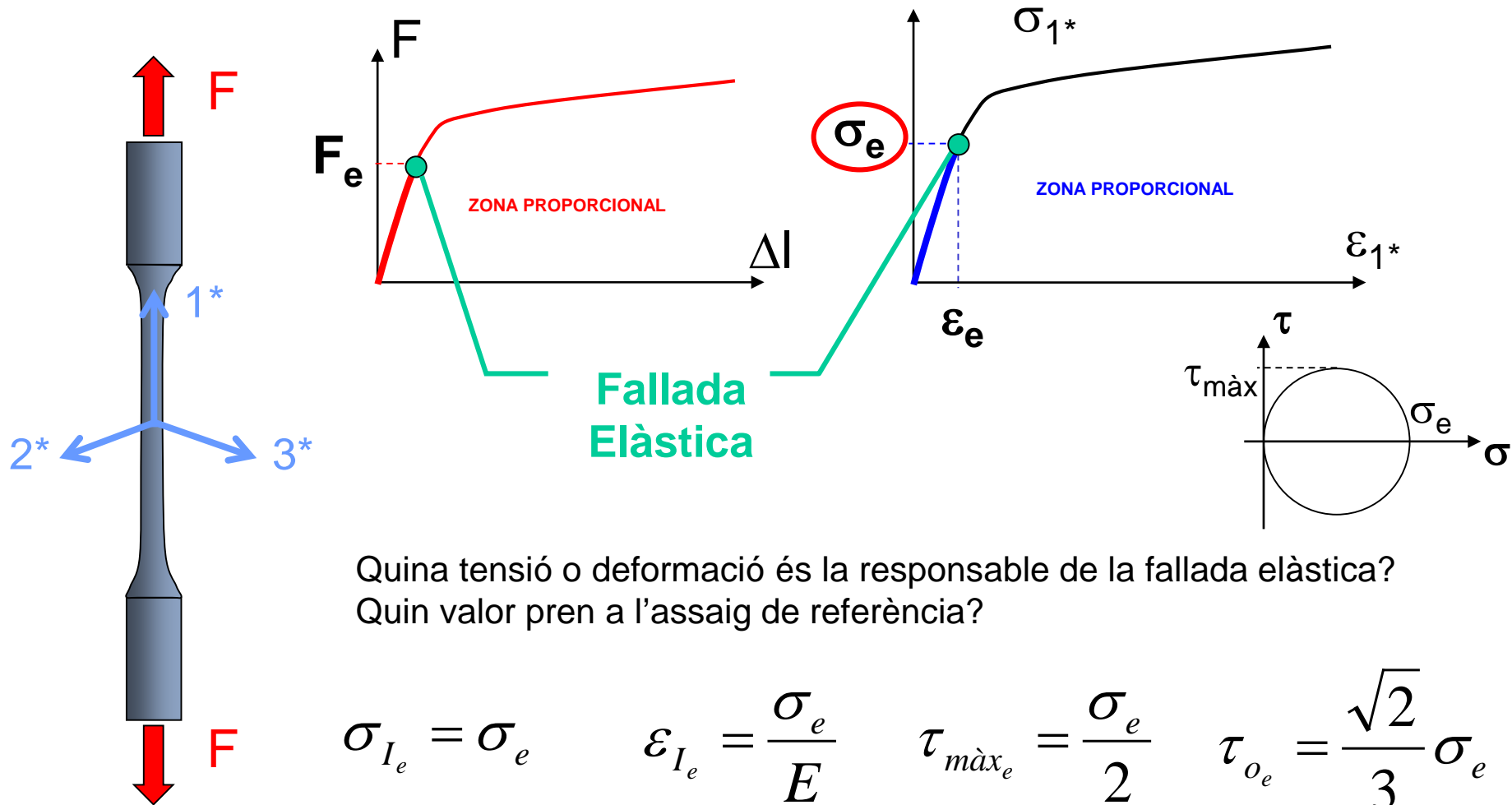


La manifestació d'un o altre tipus de ruptura depèn tant de les característiques intrínseques del material com del tipus de sol·licitació



## Introducció

Les tensions límit últimes, associades als diferents tipus de ruptura, poden ser determinades només en casos de càrrega senzills, habitualment en assaigs UNIAXIALS (tracció o compressió)

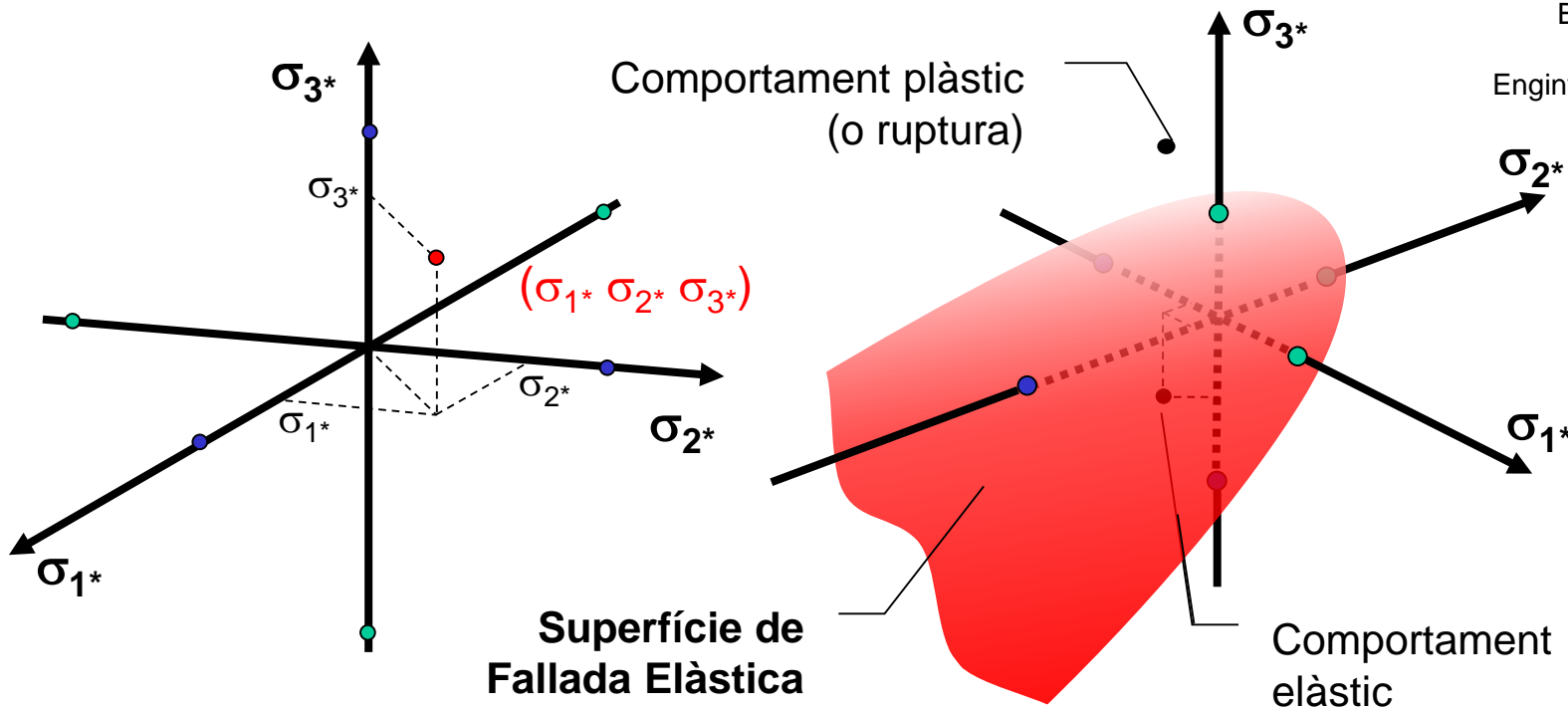


## Espai de Haigh-Westergaard. Superfície de Fallada Elàstica

Qualsevol estat de tensió pot representar-se com un punt ( $\sigma_1^*$   $\sigma_2^*$   $\sigma_3^*$ ) a l'espai de tensions principals. Podem imaginar una superfície de punts ( $\sigma_1^*$   $\sigma_2^*$   $\sigma_3^*$ ) corresponents a tots els estats de tensió que provoquen la fallada elàstica del material (materials isòtrops)



Bernard Parker Haigh  
1884 – 1941  
Enginyer mecànic escocès



Un assaig per a cada possible estat de tensió !!



Harold Malcolm Westergaard  
1888 – 1950  
Enginyer d'estructures danès

## Criteri de la Màxima Tensió Normal (Rankine)

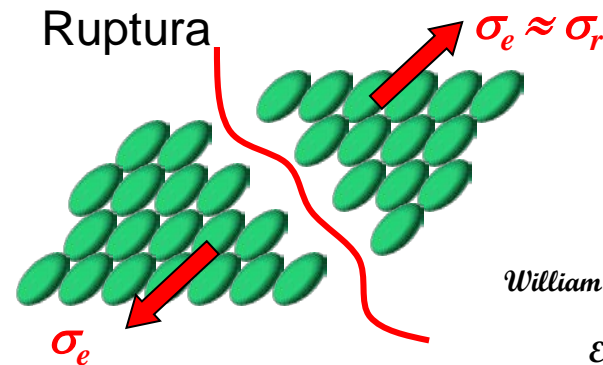
El material falla quan la tensió normal màxima de tracció o compressió ( $\sigma_I$  ò  $\sigma_{III}$ ) supera el valor límit obtingut a l'assaig uniaxial corresponent.

$$\sigma_{eq}^t = \sigma_I \quad \left| \sigma_I \right| \geq \sigma_e^t$$

o, a compressió:

$$\sigma_{eq}^c = \sigma_{III} \quad \left| \sigma_{III} \right| \geq \sigma_e^c$$

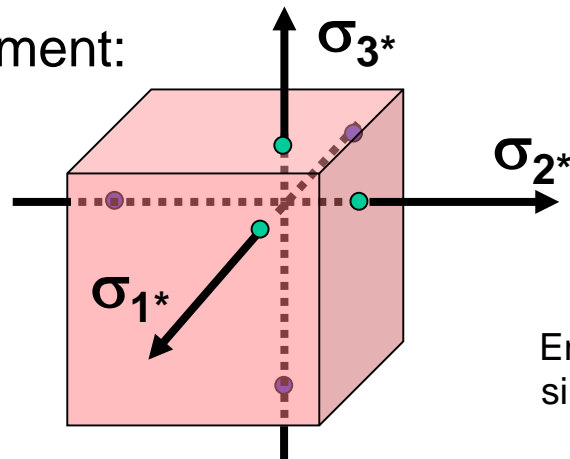
**FALLADA  
ELÀSTICA**



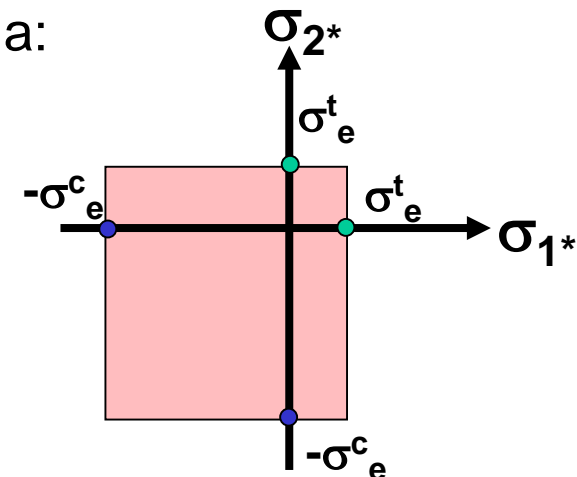
William J. Macquorn Rankine  
1820 – 1872  
Enginyer mecànic escocès

Aplicable a comportament fràgil

Gràficament:



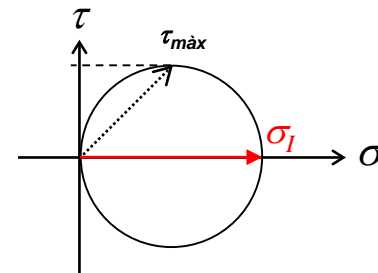
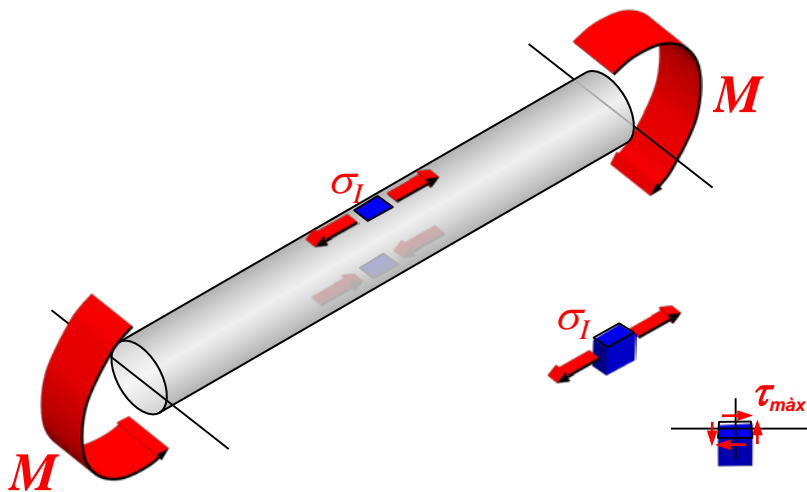
Estudi pla:



En el cas de materials isòtrops i simètrics, és un cub (o quadrat) centrat a l'origen

## # Activitat 5.4

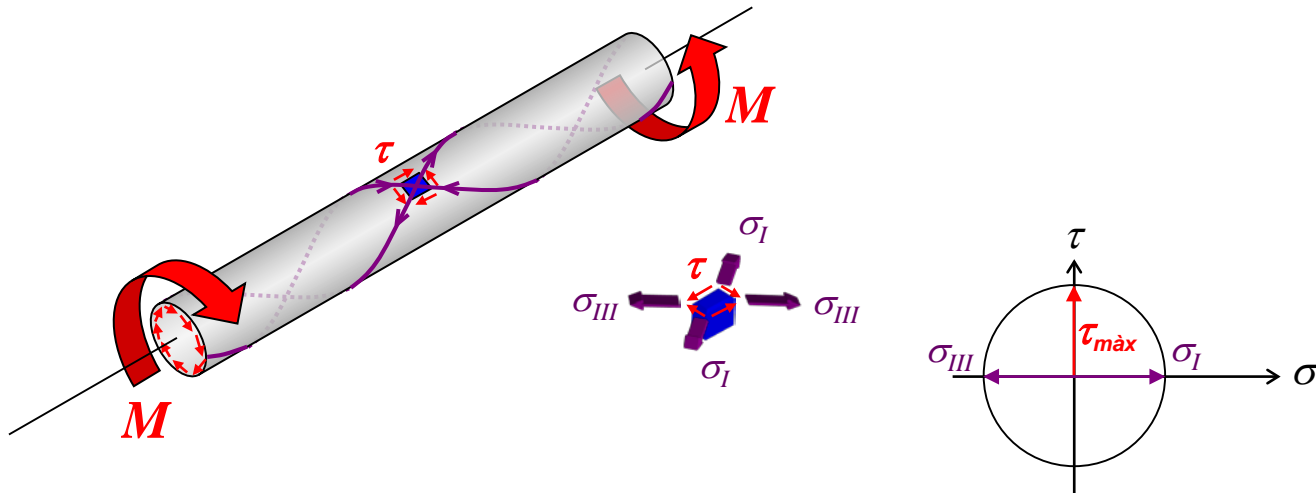
Analitzar l'aspecte de la fallada.



Quin criteri s'ajusta millor a aquesta fallada?

## # Activitat 5.4

Analitzar l'aspecte de la fallada.



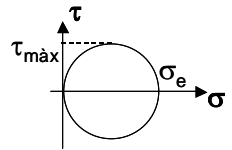
I aquest cas, obeeix al mateix criteri?



## Criteri de la Màxima Tensió Tangencial (Tresca-Guest)

El material falla quan la tensió tangencial màxima ( $\tau_{m\grave{a}x}$ ) supera el valor límit corresponent a l'assaig uniaxial.

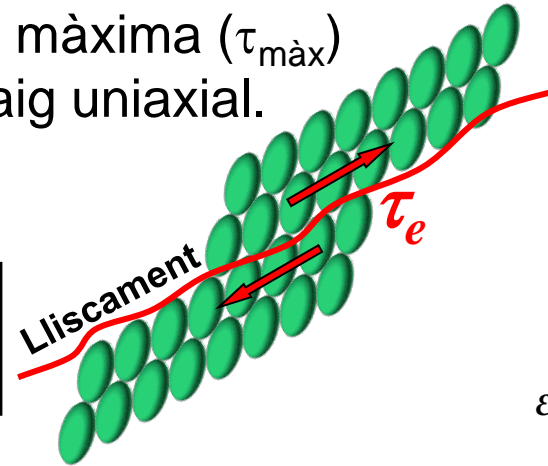
$$\tau_{m\grave{a}x} \geq \tau_e \longrightarrow \text{FALLADA ELÀSTICA}$$



$$\sigma_e = 2\tau_e$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III}$$

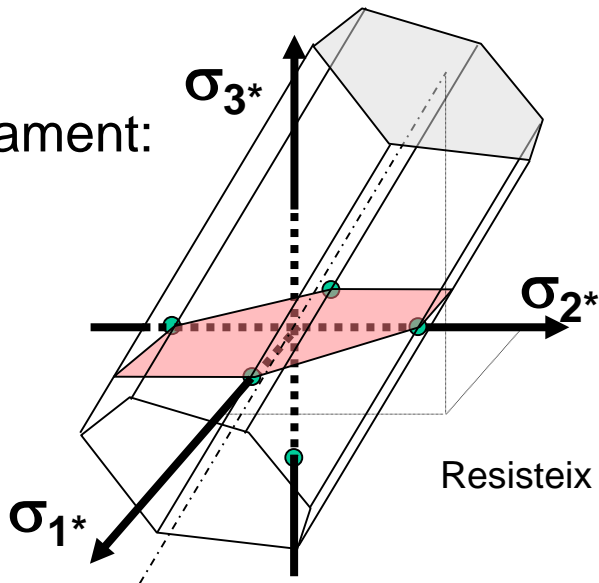
$$\sigma_{eq} \geq \sigma_e \longrightarrow \text{FALLADA ELÀSTICA}$$



Henri Édouard Tresca  
1814 – 1885  
Enginyer mecànic francès

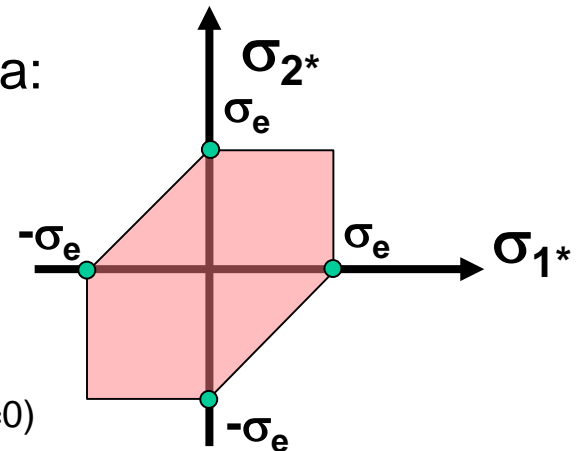
Aplicable a comportament dúctil i simètric (tracció-compensió)

Gràficament:



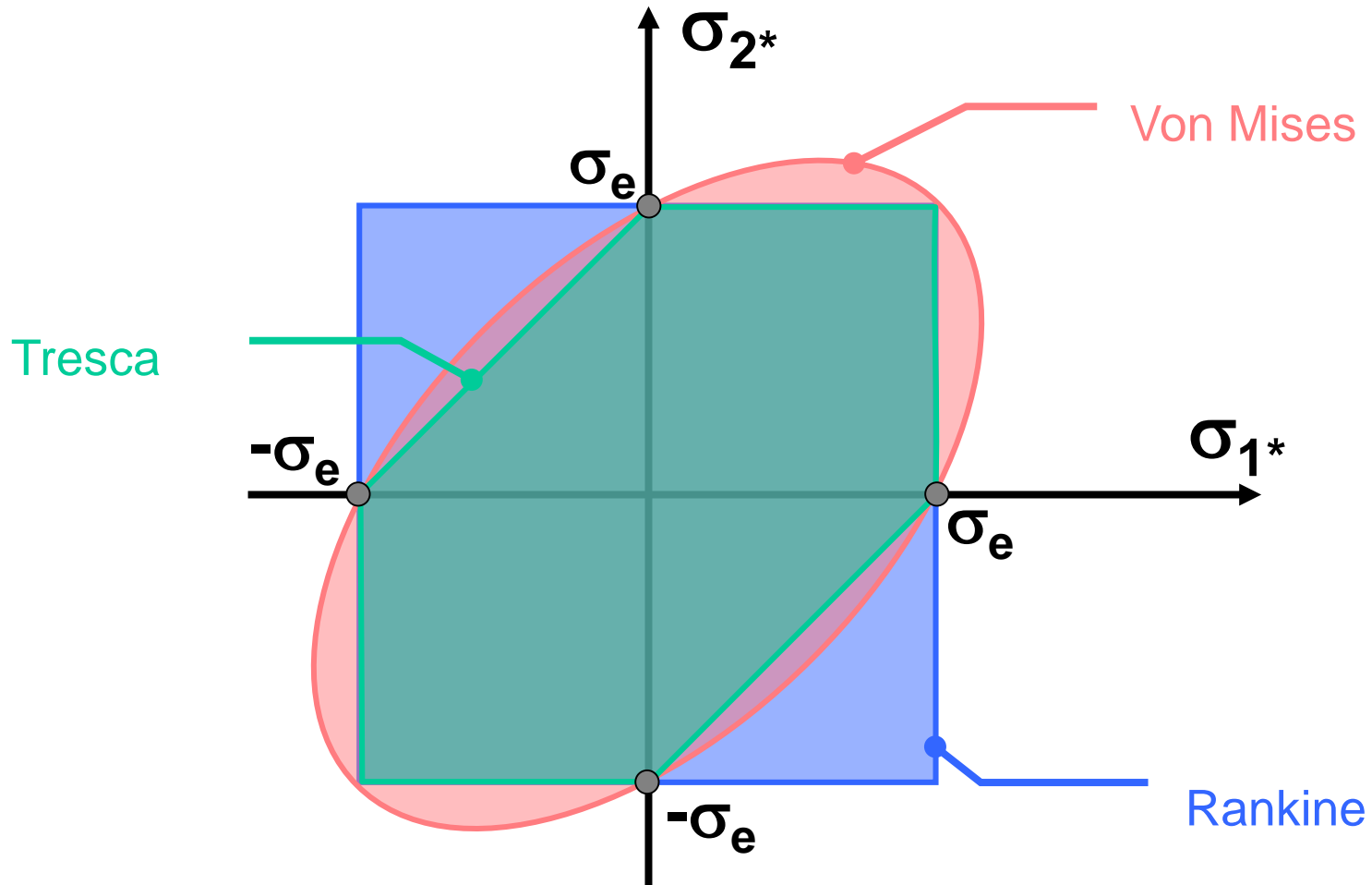
Resisteix tensió hidrostàtica infinita ( $\tau=0$ )

Estudi pla:





## Comparativa de criteris per a TENSIÓ PLANA (suposant un comportament simètric tracció-compressió)





## # Activitat 5.5

### ## Entregable 9

(límit 2 setmanes)

**MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS**

Permutació 1

Temps 60 min

**PROBLEMA 2**

Punts 10

10.01.05

Pes: 1

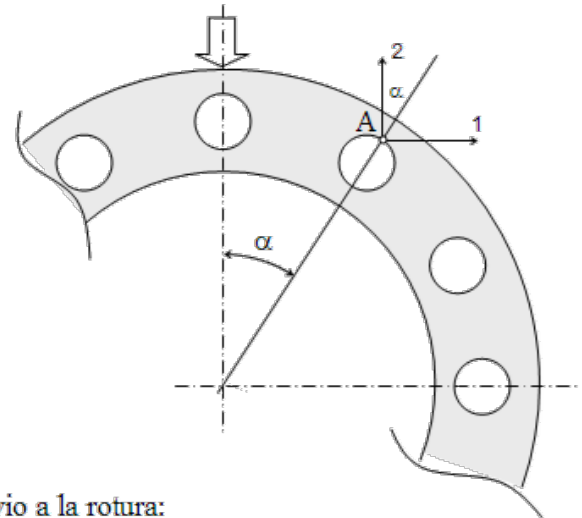
La figura adjunta muestra la sección transversal de una tubería circular refrigerada de gran longitud, cuya deformación axial (perpendicular a la figura) se halla impedida.

Sometida a carga mecánica estática se produce una rotura frágil al propagarse una fisura iniciada en el punto **A**.

Material:

 Módulo elástico  $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ 

 Coef. de Poisson  $\nu = 0,3$ 

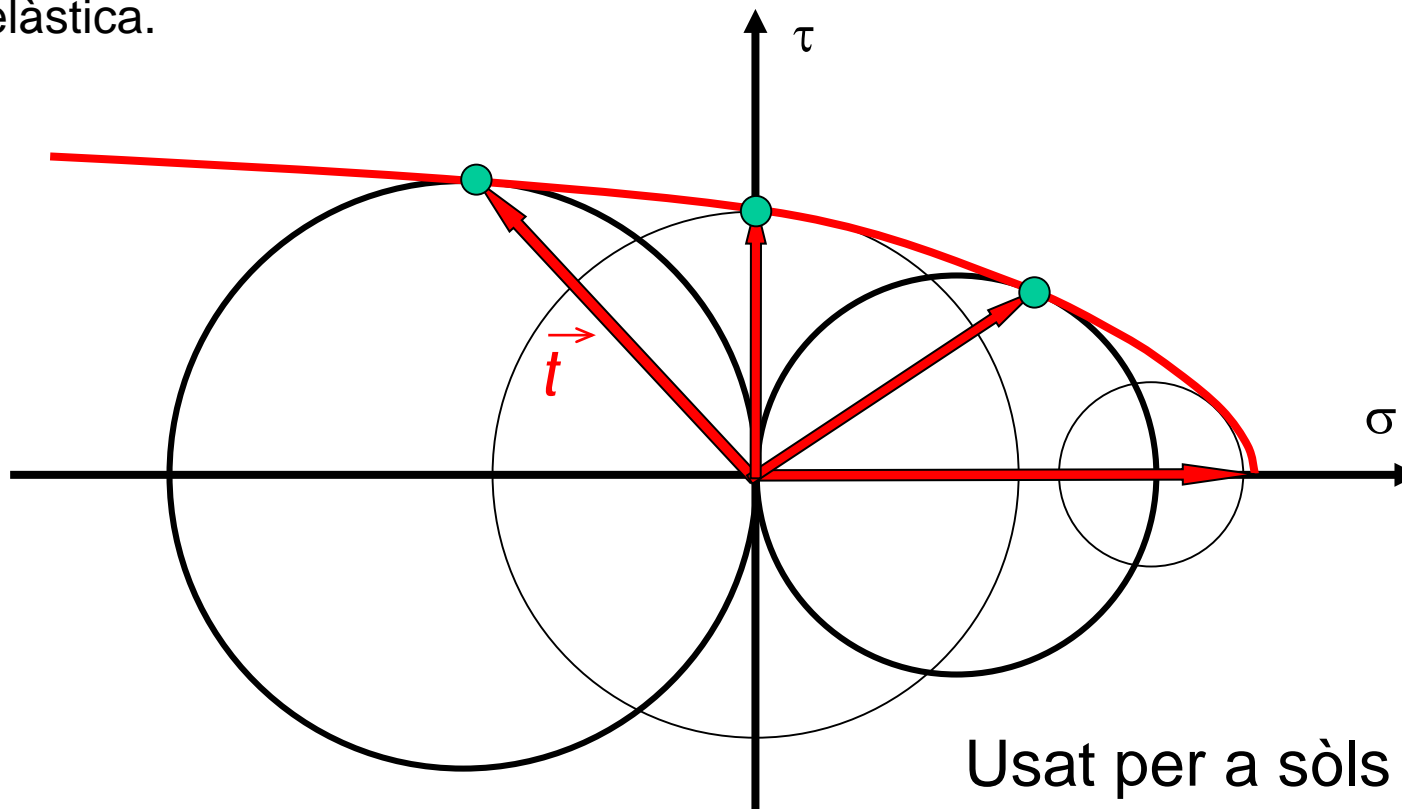
 Tensión límite  $\sigma_e = 800 \text{ N/mm}^2$ 
 $\alpha = 30^\circ$ 


Se pide, para el punto **A** y justo en el instante previo a la rotura:

- 1) Determinar las tensiones principales  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$  y  $\sigma_3^*$ , identificar sobre el dibujo sus direcciones principales asociadas. Identificar las direcciones **I**, **II** y **III**.
- 2) Determinar las deformaciones principales  $\varepsilon_1^*$ ,  $\varepsilon_2^*$  y  $\varepsilon_3^*$  y calcular el tensor deformación según los ejes 1-2-3.
- 3) Determinar la variación del ángulo  $\alpha$  en el punto **A**.
- 4) Determinar gráficamente (círculos de Mohr) los vectores tensión  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{t}_2$  y  $\vec{t}_3$ , y dibujarlos sobre el punto **A**.

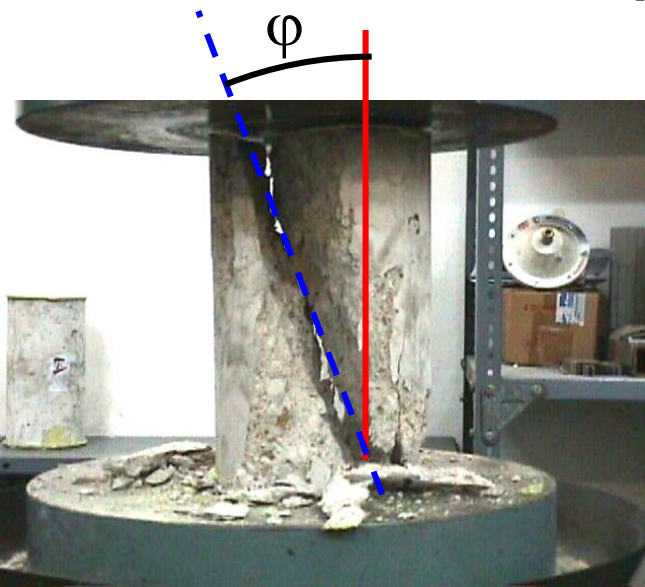
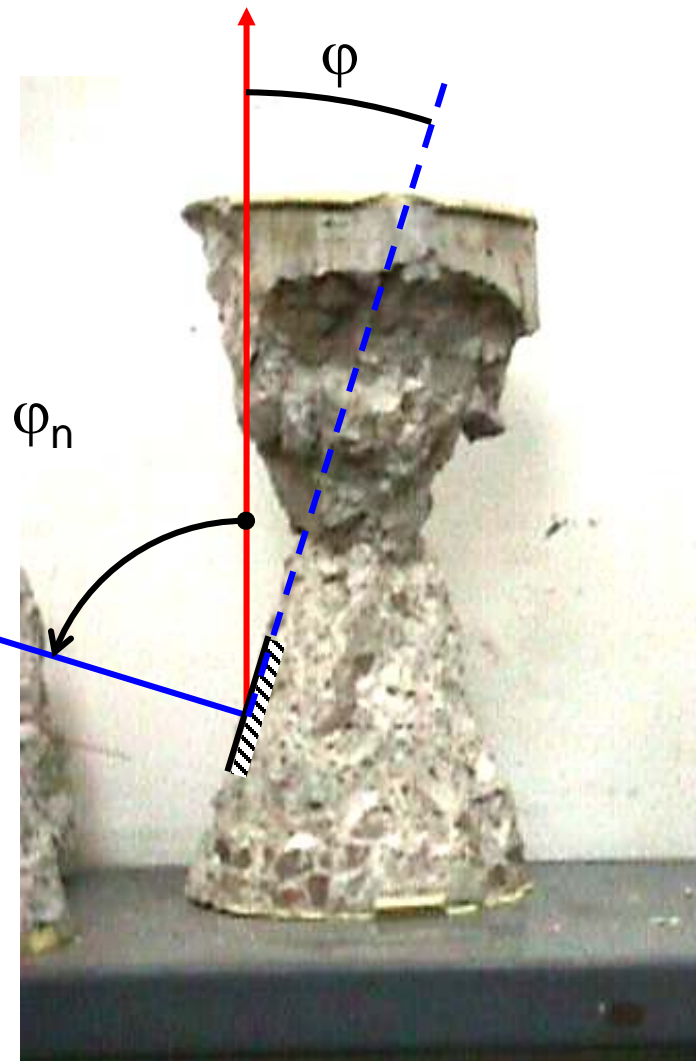
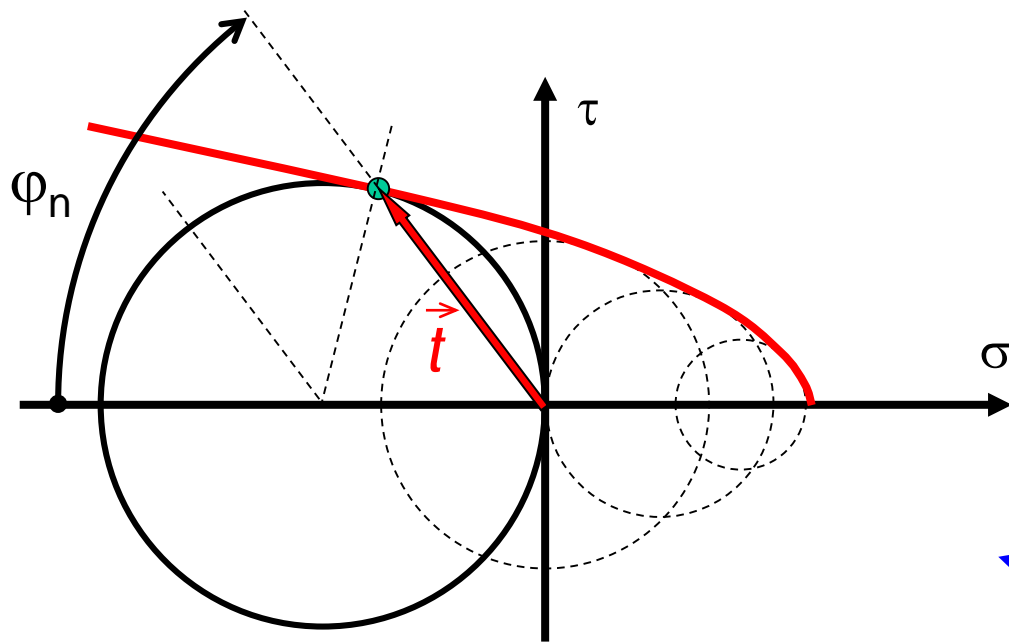
## Criteri de la Corba Intrínseca

Suposa que la fallada, i el pla en què es produeix, està relacionada directament amb el vector tensió  $\vec{t}$  que actua sobre aquest pla. En el pla de components intrínseques, l'extrem de  $\vec{t}$  coincideix amb el punt de tangència entre el seu cercle de Mohr i la corba evolvent de tots els cercles associats a la fallada elàstica.



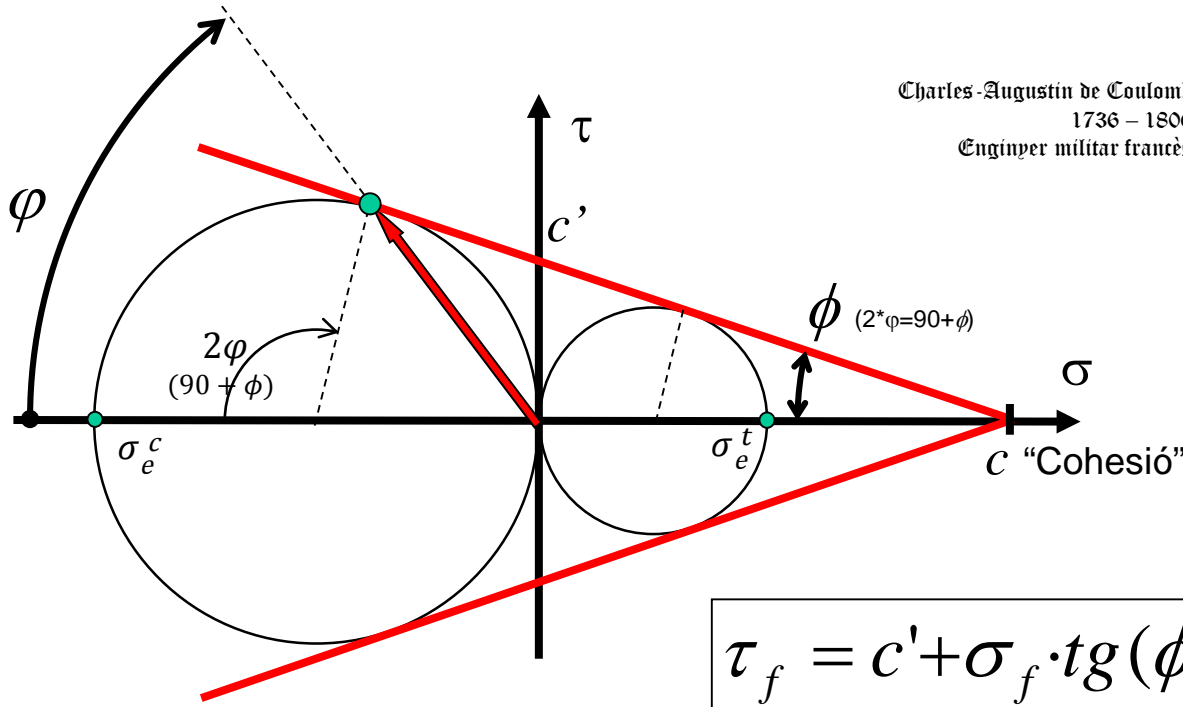
Usat per a sòls i d'altres materials granulars asimètrics (formigó, ceràmics,..)

### Criteri de la Corba Intrínseca

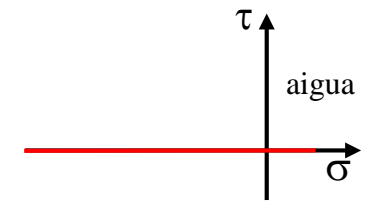
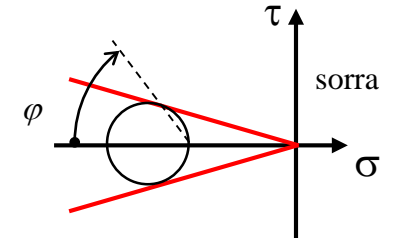
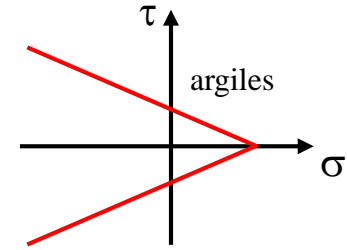


$\varphi$ : Angle de ruptura

# Criteri de la Corba Intrínseca. Teoria de Mohr-Coulomb



Charles-Augustin de Coulomb  
1736 – 1806  
Enginyer militar francès

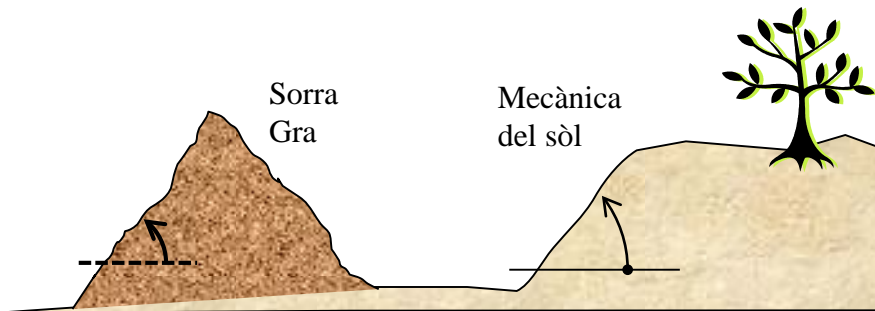


$$\tau_f = c' + \sigma_f \cdot \text{tg}(\phi)$$

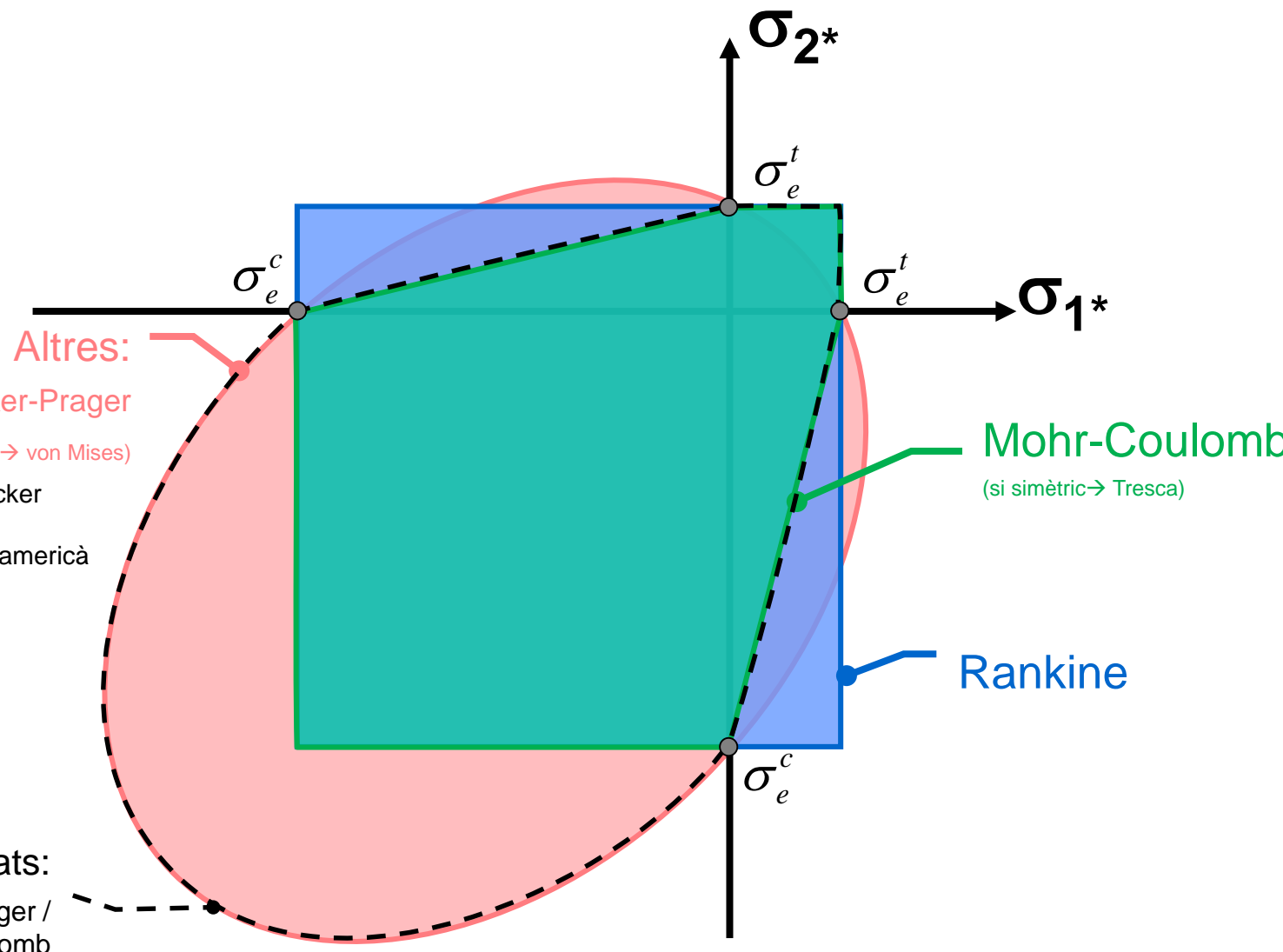
$\phi$ : "Angle de fricció interna"

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \frac{\sigma_e^t}{\sigma_e^c} \sigma_{III}$$

$\sigma_{eq} \geq \sigma_e^t \rightarrow$  **FALLADA ELÀSTICA**



# Comparativa de criteris per a TENSIÓ PLANA (amb comportament asimètric tracció-compensió)



Altres:  
Drucker-Prager  
(si simètric → von Mises)

Mohr-Coulomb  
(si simètric → Tresca)

Rankine

Combinats:  
Drucker-Prager /  
Mohr-Coulomb



Daniel Charles Drucker  
1918 – 2001  
Eng. mecànic nord-americà



William Prager  
1903 – 1980  
Matemàtic alemany

# # Activitat 5.6

## (límit 3 setmanes)

**MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS**

Permutació 1

Temps 90 min

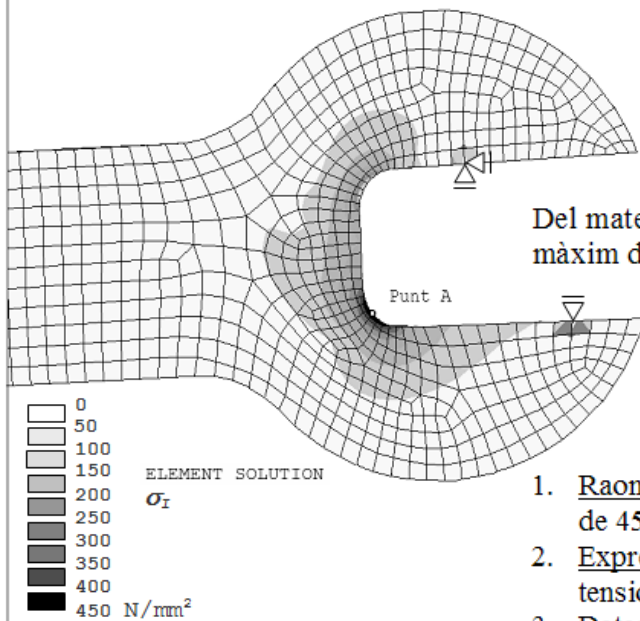
**PROBLEMA 2**

Punts 10

22.06.07

Pes: 1

L'estudi tensional (elàstic i lineal) d'una clau fixa, mitjançant el mètode dels elements finits, dona el mapa de tensions principals màximes ( $\sigma_I$ ) de la figura. El valor més intens es produeix en el punt *A* indicat.



Gruix constant 10 mm

Càrrega exterior resultant 1000 N

No hi ha accions externes perpendiculars al pla de la peça

Del mateix model d'elements finits s'obté el mapa de tensions tangencials  $\sigma_{12}$  (no il·lustrat) amb el resultat màxim de  $-225 \text{ N/mm}^2$  per al mateix punt *A*.

 Es demana, per al punt *A*:

1. Raonar i representar gràficament sobre la peça, en quins plans, direcció i sentit actua la tensió il·lustrada de  $450 \text{ N/mm}^2$ .
2. Expressar el tensor tensió en les direccions principals. Descriure les particularitats de les direccions i tensions principals.
3. Determinar gràficament (Mohr) l'angle que forma la normal a la superfície en *A* amb els eixos 1-2.
4. Deduir l'expressió del tensor tensió en la base 1-2-3. Dibuixar totes les components i interpretar-ne el significat físic.
5. Si el material falla de manera dúctil, raonar en quin pla s'iniciarà la plastificació.
6. Si el material fallés de manera fràgil, raonar en quin pla s'iniciaria la ruptura.
7. Determinar la tensió equivalent segons els criteris de fallida de Rankine, Tresca i von Mises, i raonar el motiu de les discrepàncies i/o coincidències entre els diferents criteris.
8. Determinar la tensió de límit elàstic mínima necessària per a obtenir un coeficient de seguretat  $\geq 1,2$  amb cadascun dels criteris de fallida, comparar els resultats en el pla de tensions principals (Westergaard).
9. Si la tensió de límit elàstic del material finalment escollit és de  $900 \text{ N/mm}^2$ , determinar quina càrrega exterior resultant màxima podem aplicar sense disminuir la seguretat.
10. Segons les característiques de la malla i enllaços indicats, raonar quina seria la dimensió de la matriu de rigidesa reduïda.

Característiques de la malla:

997 nodes

 357 elements sòlid 2D  
 de 8 nodes i 2 G.L. per node